Vážení a milí,

ve třetím týdnu výuky lineární algebry začneme nové téma, které je obsaženo v 17. a 18. paragrafu učebnice. Toto téma je poměrně obtížné. Pokud bychom je chtěli řádně a do všech detailů probrat, museli bychom mu věnovat alespoň šest týdnů, které k disposici nemáme. Naučíme se proto pouze nejdůležitější definice, některé věty probereme bez důkazů.

Nejprve si připomeneme to, co bychom již měli znát. Budeme motivovat naše další snažení.

Jestliže má endomorfismus f prostoru $V = T^n$ vzhledem ke kanonické bázi matici A, má vzhledem k jiné bázi N matici $B^{-1}AB$, kde B je maticí přechodu od báze N ke kanonické bázi. To vyplývá z Věty 11.4 a Důsledku 11.5. Matice A endomorfismu f může být „ošklivá“ (když je v ní hodně nenulových prvků). Proto se budeme snažit najít takovou bázi N, vzhledem ke které bude matice endomorfismu f „krásná“ (chceme, aby v ní bylo hodně nul). S krásnou maticí se dobře počítá, např. když je diagonální, nebo se od diagonální jen málo liší.

Za všechno se musí zaplatit. Kanonická báze je hezká, matice endomorfismu f vzhledem k ní však může být ošklivá. Dospějeme-li k hezké matici $B^{-1}AB$ vůči bázi N, zaplatíme za to patrně tím, že báze N bude ošklivá.

V prvním pokusu se pokusíme hledat bázi $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ prostoru $V = T^n$, vzhledem ke které má endomorfismus f diagonální matici

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vzpomeňme si na definici matice homomorfismu. Musí tedy být

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \quad f(v_2) = \lambda_2 v_2, \quad \dots, \quad f(v_n) = \lambda_n v_n,$$

neboli

$$(\lambda_1 \cdot 1_V - f)(v_1) = o, \quad (\lambda_2 \cdot 1_V - f)(v_2) = o, \quad \dots, \quad (\lambda_n \cdot 1_V - f)(v_n) = o,$$

kde symbolem 1_V značíme identický automorfismus prostoru $V = T^n$.

Odtud vyplývá, že endomorfismy

$$\lambda_1 \cdot 1_V - f, \quad \lambda_2 \cdot 1_V - f, \quad \dots, \quad \lambda_n \cdot 1_V - f$$

prostoru $V = T^n$ nejsou monomorfismy, neboť zobrazují nenulové vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ na nulový vektor o. Matice těchto endomorfismů

$$\lambda_1 \cdot E - A, \quad \lambda_2 \cdot E - A, \quad \dots, \quad \lambda_n \cdot E - A$$

tedy musí být singulární, jejich determinanty jsou proto nulové:

$$\det\big(\lambda_1 \cdot E - A\big) = 0, \quad \det\big(\lambda_2 \cdot E - A\big) = 0, \quad \dots, \quad \det\big(\lambda_n \cdot E - A\big) = 0.$$

Odtud vyplývá naše snaha: vyšetřovat polynom $p(\lambda) = \det\big(\lambda \cdot E - A\big)$ stupně n v neurčité λ a hledat hodnoty neurčité λ, pro které bude roven nule.

A pro nalezené hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (poštěstí-li se) musíme hledat řešení soustav rovnic

$$(\lambda_1 \cdot E - A) \cdot x = 0, \quad (\lambda_2 \cdot E - A) \cdot x = 0, \quad \ldots, \quad (\lambda_n \cdot E - A) \cdot x = 0.$$

Bylo by pěkné, kdyby se to vždy podařilo. Tak tomu však obecně není. Zmíněný polynom $p(\lambda)$ nemusí mít v tělese T právě n kořenů, dokonce nemusí mít v T žádný kořen. Situace navíc závisí na tom, o jaké těleso se jedná. V tělese komplexních čísel musí mít n kořenů (násobný kořen počítáme násobně), v tělese reálných či racionálních čísel a rovněž v konečných tělesech tomu tak není. Nemusí tam mít žádný kořen. Vzpomeňte na problematiku kvadratické rovnice s reálnými koeficienty – ta může mít dva reálné kořeny, jeden reálný dvojnásobný, nebo nemá žádný reálný kořen (tj. dva komplexní).

Je tedy přirozené zavést Definicí 17.1 k dané matici A charakteristickou matici, charakteristický polynom, vlastní čísla atd. Problematiku těchto nových pojmů přibližuje Příklad 17.2, Věta 17.3, Příklad 17.5. Poznámku 17.4 a Věty 17.6 a 17.7 můžeme vynechat.

Pozornost však věnujte Definici 17.8 a Větě 17.9. V následujícím textu se objeví pojem ideálu a hlavního ideálu (z obecné algebry); dokáže se, že každý ideál oboru integrity $T[x]$ je hlavní (což byste již měli znát z algebry). Provedená úvaha vede k Definici 17.10 pojmu minimální polynom matice A.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že skončila moje pracovní smlouva s Matematicko-fyzikální fakultou UK, není již moje webová stránka přístupná odkliknutím ze stránky Katedry didaktiky matematiky. Ještě však existuje, dostanete se na ni buď

vypsáním její adresy: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~becvar/

nebo přes moji webovou stránku na FD ČVUT: https://www.fd.cvut.cz/personal/becvajin/

* * *

Kniha týdne. Evan Hunter: *Džungle před tabulí* (1954)

Autorem je Salvatore Lombino (1926–2005), Evan Hunter je jeho pseudonym. Patrně ho znáte jako autora detektivek, které psal pod dalším pseudonymem – Ed McBain. Knihu vřele doporučuji pro budoucí učitele.

Citát týdne. Již Jan Ámos Komenský (1592–1670) zdůrazňoval, proč se v matematice provádějí důkazy (moje interpretace jeho následujícího citátu):

Nevěřte všemu, co se vám k věření předkládá. Zkoumejte vše a přesvědčujte se o všem sami!

Mějte se co nejlíp a opravdu, ale opravdu se opatrujte.

Zdraví J. B.

V Praze 9. března 2021