Vlastní čísla a vlastní vektory

Nechť f je endomorfismus vektorového prostoru V nad tělesem T, tj. $f : V \to V$. Jestliže pro skalár $\lambda \in T$ a **nenulový** vektor $v \in V$ je $f(v) = \lambda v$, říkáme, že λ je vlastní číslo endomorfismu f a v vlastním vektorem endomorfismu f příslušným k vlastnímu číslu λ. [Jestliže je A matice endomorfismu f, potom je λ vlastním číslem matice A a v vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu λ.]

Endomorfismus f tedy zobrazí vektor v na jeho λ-násobek (geometrický aspekt: směr zůstane zachován, vektor se natáhne nebo zkrátí, případně se ještě obrátí na druhou stranu).

V definici musíme předpokládat nenulovost vektoru v. Pokud bychom v definici připustili nulový vektor v, byl by každý skalár vlastním číslem: $f(o) = \lambda \cdot o$ pro každý skalár λ.

Skalár nula může být vlastním číslem endomorfismu f, tj. může být $f(v) = 0 \cdot v$ pro nějaký nenulový vektor v. V tomto případě endomorfismus f není automorfismem, neboť zobrazuje nenulový vektor na nulový vektor. Jeho matice je tedy singulární, její determinant je nulový, a tedy absolutní člen jejího charakteristického polynomu je nulový, populárně řečeno: charakteristický polynom nemá absolutní člen.

Automorfismus má pouze nenulová vlastní čísla.

Ještě je dobré si uvědomit, že každý nenulový násobek vlastního vektoru je rovněž vlastním vektorem (k témuž vlastnímu číslu): je-li $f(v) = \lambda v$, je rovněž $f(kv) = \lambda \cdot kv$.

Obecněji: Jsou-li v_1, v_2 vlastní vektory ke stejnému vlastnímu číslu λ, potom je každá jejich lineární kombinace vlastním vektorem k témuž vlastnímu číslu: je-li $f(v_1) = \lambda v_1$, $f(v_2) = \lambda v_2$, je rovněž $f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = \lambda \cdot (k_1 v_1 + k_2 v_2)$. Přesněji bychom měli říkat *každá jejich lineární kombinace, která není nulovým vektorem.* To se ovšem nedělá, tuto nepřesnost tolerujeme, často hovoříme o podprostoru vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ (ten obsahuje nulový vektor, který není vlastním vektorem).

5. 4. 2021