

Lineární algebra I – NMUM103 (ZS)

• Definice a příklady definovaného pojmu (2 body).

- Definujte pojem *komutativní těleso*. Příklady.
- Definujte *násobení matic*. Příklady.
- Definujte pojem *vektorový prostor*. Příklady.
- Definujte pojem *lineární obal podmnožiny vektorového prostoru*. Příklady.
- Definujte pojem *lineárně nezávislá množina vektorů*. Příklady.
- Definujte pojem *množina generátorů vektorového prostoru*. Příklady.
- Definujte pojem *báze vektorového prostoru*. Příklady.
- Definujte pojem *spojení podprostorů vektorového prostoru*. Příklady.
- Definujte pojem *homomorfismus*. Příklady.
- Definujte pojem *hodnota homomorfismu*. Příklady.
- Definujte pojem *matice homomorfismu*. Příklady.

• Definice a příklady definovaného pojmu (3 body).

- Definujte pojmy *symetrická matice* a *antisymetrická matice*. Příklady.
- Definujte pojem *hermitovská matice*. Příklady.
- Definujte pojem *invertibilní matice*. Příklady.
- Definujte pojmy *konečně* a *nekonečně generovaný prostor*. Příklady.
- Definujte pojem *množina generátorů vektorového prostoru*. Příklady.
- Definujte pojem *matice přechodu*. Příklady.
- Definujte pojem *lineární algebra*. Příklady.
- Definujte pojem *matice homomorfismu*. Příklady.
- Definujte pojem *elementární úprava matice*. Příklady.
- Definujte pojem *hodnota matice*. Příklady.

• Znění věty (2 body).

- Přesně formulujte větu o převedení matice na odstupňovaný tvar.
- Přesně formulujte větu o převedení symetrické matice na diagonální tvar.
- Přesně formulujte větu o rozšíření lineárně nezávislé množiny na bázi.
- Přesně formulujte větu o vyjádření lineárního obalu podmnožiny vektorového prostoru pomocí lineárních kombinací.
- Formulujte větu o základní vlastnosti báze týkající se jednoznačnosti vyjádření vektorů.
- Formulujte větu o vzájemně jednoznačném vztahu homomorfismů a matic (maticová reprezentace homomorfismů).
- Přesně formulujte větu o vztahu dimenzí dvou podprostorů vektorového prostoru a jejich direktního součtu.

- Ekvivalentním způsobem vyjádřete skutečnost, že je množina vektorů lineárně nezávislá.
- Ekvivalentním způsobem vyjádřete skutečnost, že je množina vektorů lineárně závislá.

• **Jednoduchý důkaz dané věty (3 body).**

- Dokažte, že inverzním zobrazením k izomorfismu je izomorfismus.
- Dokažte, že úplným vzorem vektoru při homomorfismu je lineární množina.
- Dokažte, že úplným vzorem podprostoru při homomorfismu je podprostor.
- Dokažte, že homomorfismus zobrazuje množinu generátorů vektorového prostoru na množinu generátorů obrazu tohoto prostoru.
- Dokažte, že homomorfismus zobrazuje podprostor vždy na podprostor.
- Dokažte, že skládání homomorfismů odpovídá násobení matic.
- Dokažte, že průnik podprostorů vektorového prostoru je podprostor.
- Dokažte, že matice je regulární právě tehdy, když je invertibilní.
- Dokažte, že složení dvou homomorfismů je homomorfismus. Nejprve uveďte, na jakých vektorových prostorech působí.
- Dokažte, že součet dvou homomorfismů je homomorfismus. Nejprve uveďte, na jakých vektorových prostorech působí.
- Dokažte, že je-li fg izomorfismus, potom je g monomorfismus a f epimorfismus. Uveďte, na jakých vektorových prostorech homomorfismy f a g působí.
- Dokažte, že monomorfismus je charakterizován nulovým jádrem.
- Dokažte, že hodnost navzájem transponovaných matic je stejná.

• **Obtížnější důkaz dané věty (5 bodů).**

- Dokažte, že $\mathbb{Z}_n$ je pole právě tehdy, když je n prvočíslo.
- Dokažte, že n lineárně nezávislých vektorů nelze vyjádřit lineárními kombinacemi $n-1$ vektorů.
- Přesně formulujte větu o vzájemném vztahu homomorfismu a jeho matice a dokažte ji (maticová reprezentace homomorfismů).
- Přesně formulujte větu o vzájemném vztahu hodnoti homomorfismu a hodnoti jeho matice a dokažte ji.
- Přesně formulujte větu o rozšíření lineárně nezávislé množiny vektorů na bázi celého prostoru a dokažte ji.
- Uveďte přesné znění věty charakterizující bázi pomocí rozšiřování zobrazení na homomorfismus. Dokažte alespoň jednu implikaci.
- Uveďte přesné znění věty o hodnoti a defektu homomorfismu a dokažte ji.
- Uveďte přesné znění věty o dimenzích spojení a průniku a dokažte ji.
- Přesně zformulujte větu o řešitelnosti a množině všech řešení soustavy lineárních rovnic a dokažte ji.