Větu 10.7 se pokusím ozřejmit na příkladu. Uvažujme vektorový prostor R^3, nad tělesem reálných čísel R. Jeho prvky jsou trojice reálných čísel. Mějme jeho kanonickou bázi, tj. bázi $M = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Definujme zobrazení g vektorů báze M do prostoru R^4 například tímto přiřazením:

$$(1,0,0) \rightarrow (1,2,3,4), \quad \text{tj.} \quad g((1,0,0)) = (1,2,3,4),$$

$$(0,1,0) \rightarrow (0,1,1,1), \quad \text{tj.} \quad g((0,1,0)) = (0,1,1,1),$$

$$(0,0,1) \rightarrow (1,–1,0,0), \quad \text{tj.} \quad g((0,0,1)) = (1,–1,0,0).$$

Zobrazení g je definováno **pouze** na tříprvkové množině M, nikde jinde. Obecný vektor (x,y,z) prostoru R^3 lze **jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci** vektorů báze M, tj.

$$(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1).$$

Zobrazení $g : M \rightarrow R^4$ chceme **rozšířit** na homomorfismus $f : R^3 \rightarrow R^4$, tj. chceme najít homomorfismus f prostoru R^3 do prostoru R^4, který zobrazuje vektory báze M stejně jako zobrazení g. Protože má být f **homomorfismus**, který **rozšiřuje** zobrazení g, musí být

$$\begin{aligned}
&f\big((x,y,z) \big) = f\big(x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) \big) = \\
&= x \cdot f((1,0,0)) + y \cdot f((0,1,0)) + z \cdot f((0,0,1)) = \\
&= x \cdot g\big((1,0,0)) + y \cdot g((0,1,0)) + z \cdot g((0,0,1)\big) = \\
&= x \cdot (1,2,3,4) + y \cdot (0,1,1,1) + z \cdot (1,–1,0,0) = (x+z,\ 2x+y–z,\ 3x+y,\ 4x+y).
\end{aligned}$$

Je tedy $f\big((x,y,z)\big) = (x+z,\ 2x+y–z,\ 3x+y,\ 4x+y)$, **jinak definovat *f* nelze**. Našli jsme předpis pro homomorfismus f. V duchu 10.7 – implikace v bodě (i) – jsme zobrazení g báze M prostoru R^3 do prostoru R^4 rozšířili na homomorfismus f.

Poznámka. Pojem *rozšíření* zobrazení znamená toto: Je-li M podmnožinou množiny V a g zobrazení M do W, pak zobrazení f množiny V do množiny W *rozšiřuje zobrazení g*, jestliže se jejich obrazy shodují na celé množině M, tj. $f(x) = g(x)$ pro každé x z podmnožiny M.

Endomorfismus a automorfismus.
Automorfismus vektorového prostoru V je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny V na množinu V, které je navíc *homomorfismem*. Je to vlastně *permutace* množiny V, která je homomorfismem (obvykle se však termín permutace užívá jen tehdy, když je množina V konečná).

Endomorfismus prostoru V může zobrazovat dva různé vektory na stejný vektor, tj. endomorfismus **může být zobrazení, které není prosté**. Příklad snadno zkonstruujeme na nějakém prostoru konečné dimenze. Uvažujme např. prostor vektorů v prostoru, které vycházejí z počátku, a jako endomorfismus tohoto prostoru uvažujme kolmé promítání do nějaké roviny procházející počátkem – toto zobrazení není ani *prosté* ani *na*).

Příklad. Uvažujme vektorový prostor všech polynomů s reálnými koeficienty.

- Zobrazení f, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci, je endomorfismus, který není prostý, ale je na.
- Zobrazení g, které každému polynomu $p(x)$ přiřadí polynom $x \cdot p(x)$, je endomorfismus, který není na, ale je prostý.

Jestliže má prostor V konečnou dimenzi, pak každý endomorfismus, který není automorfismem, není ani prostý, ani na. To plyne např. z věty o hodnosti a defektu.

Věta o hodnosti a defektu. Nejprve je třeba dobře pochopit, co je *jádro* a *obraz* homomorfismu. Mějme homomorfismus f prostoru V do prostoru W.

Jádro homomorfismu f (značíme Ker f) je **podprostor prostoru *V***, který sestává ze všech vektorů prostoru V, které se zobrazí na nulový vektor prostoru W.

Obraz homomorfismu f (značíme Im f) je **podprostor prostoru** W, který sestává ze všech obrazů vektorů prostoru V při homomorfismu f.

Dimenze jádra Ker f se nazývá *defekt* homomorfismu f, značí se d(f).

Dimenze obrazu Im f se nazývá *hodnost* homomorfismu f, značí se r(f).

- Obrazem Ker f je nulový podprostor prostoru W, tedy f(Ker f) = 0.
- Im f je obrazem celého prostoru V při f, tj. $f(V)$ = Im f.

Je-li f monomorfismus, je jeho jádro nulové, tj. Ker f = 0, tj. d(f) = 0.

Je-li f epimorfismus, je jeho obrazem celý prostor W, tj. Im $f = W$, resp. r(f) = dim W.

Ve větě 10.18 je pro homomorfismus $f\colon V \to W$ uveden vztah

$$\dim V = \mathrm{d}(f) + \mathrm{r}(f),$$

tj. dimenze prostoru, **ze kterého zobrazujeme**, je rovna součtu defektu a hodnosti homomorfismu f.

Náčrt důkazu. Zvolíme libovolnou bázi jádra Ker f a **rozšíříme ji** na bázi celého prostoru. [To můžeme učinit podle věty 8.11.]

Báze jádra Ker f má d(f) prvků, báze celého prostoru V má dim V prvků.

Vektory báze jádra se homomorfismem f zobrazí na nulový vektor prostoru W.

Přidané vektory $[$je jich $\dim V - \mathrm{d}(f)]$ se zobrazí na generátory podprostoru Im f prostoru W [podle jedné ze základních vlastností homomorfismu]. **Dokáže se**, že jsou navzájem různé a lineárně nezávislé [to dá trochu práce], a proto tedy tvoří bázi Im f. Je jich r(f) = dim V – d(f). A tím je výše uvedená rovnost dokázána.