Věta 10.22 říká, že dva vektorové prostory nad stejným tělesem **jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi**. Důsledkem je, že pro každé přirozené číslo n existuje (až na izomorfní obrazy) právě jediný prostor dimenze n nad tělesem T.

Příklad. Nad tělesem reálných čísel je R^2 prostor dimenze 2. Z věty 10.22 vyplývá, že každý vektorový prostor nad tělesem R dimenze 2 je s ním izomorfní. Prostor R^2 je množinou všech dvojic reálných čísel. Každou dvojici reálných čísel si můžeme představit v rovině opatřené souřadnicemi jako geometrický vektor. Nebo jako komplexní číslo. To znamená, že R^2 je izomorfní s prostorem geometrických vektorů v rovině, a je také izomorfní s prostorem komplexních čísel (nad tělesem reálných čísel). A také s každým jiným prostorem dimenze 2 nad R.

V každém prostoru V dimenze 2 nad R můžeme zvolit bázi M (má dva vektory) a každému vektoru přiřadit jeho souřadnice, tedy dvojice reálných čísel. Tím jsme vytvořili izomorfismus prostoru V na prostor R^2. A to je vlastně důkaz skutečnosti, že všechny prostory dimenze n nad tělesem T jsou izomorfní.

Nechť f: U → V je homomorfismus prostorů U, V konečných dimenzí. Podle věty o hodnosti a defektu je $\dim U = \mathrm{d}(f) + \mathrm{r}(f)$.

- Jestliže je f monomorfismus, potom je $\mathrm{d}(f) = 0$, a proto je $\dim U = \mathrm{r}(f)$, kde $\mathrm{r}(f)$ je nejvýše rovna dim V. Prostor V tedy nemůže mít menší dimenzi než prostor U.
- Jestliže je f epimorfismus, potom je $\mathrm{r}(f) = \dim V$, a proto je $\dim U = \mathrm{d}(f) + \dim V$, proto dim V je nejvýše rovna dim U. Prostor V tedy nemůže mít menší dimenzi než prostot U.
- Jestliže je f izomorfismus, je tedy $\dim U = \dim V$.

Mějme endomorfismus f prostoru V **konečné dimenze**, tj. homomorfismus f: $V \to V$.

- Je-li f monomorfismus, je $\mathrm{d}(f) = 0$, a tedy podle věty o hodnosti a defektu platí rovnost $\dim V = \mathrm{r}(f)$, tj. f je epimorfismus, a tedy automorfismus.
- Je-li f epimorfismus, je $\mathrm{r}(f) = V$, a tedy podle věty o hodnosti a defektu platí rovnost $\mathrm{d}(f) = 0$, tj. f je monomorfismusm, a tedy automorfismus.

Pozor! Předpoklad konečné dimenze je nutný. Jestliže má prostor V nekonečnou dimenzi, pak vždy existují jeho endomorfismy, které jsou monomorfismy, ale nikoli epimorfismy, a zároveň existují jeho endomorfismy, které jsou epimorfismy, ale nikoli monomorfismy.

Vektorový prostor Hom (U,V). Uvažujme množinu všech homomorfismů prostoru U do prostoru V. Definujeme součet homomorfismů f, g takto:

Pro každý vektor u prostoru U je $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.

A nyní musíme dokázat, že zobrazení $f+g$ je homomorfismus, tj. dokázat, že platí:

$(f+g)(u_1+u_2) = (f+g)(u_1) + (f+g)(u_2)$,

$(f+g)(au) = a\,(f+g)(u)$.

Dále definujme násobek homomorfismu f takto:

Pro každý vektor u prostoru U je $(af)(u) = a f(u)$.

A nyní musíme dokázat, že zobrazení $f+g$ je homomorfismus, tj. dokázat, že platí:

$(af)(u_1+u_2) = (af)(u_1) + (af)(u_2)$,

$(af)(bu) = \mathrm{b}(af)(u)$.

Při důkazech, tj. při ověření platnosti těchto rovností, musíme využít jednak definic součtu homomorfismů a násobku homomorfismu a jednak toho, že f a g jsou homomorfismy.

Lineární algebra jako struktura. Nejprve jsme zavedli vektorový prostor. Jako příklad vektorového prostoru jsme mimo jiné uvedli množinu obdélníkových matic nad daným tělesem (vzhledem ke sčítání matic a násobení matice skalárem). Později, když jsme poznali homomorfismy, jsme si ukázali, že množina všech homomorfismů prostoru U do prostoru V je rovněž vektorovým prostorem (vzhledem ke sčítání homomorfismů a násobení homomorfismu skalárem). Pokud se navíc jedná o **čtvercové** matice, můžeme je navíc násobit (přitom je násobení asociativní a nekomutativní). Pokud je $U = V$, můžeme homomorfismy (tedy **endomorfismy** prostoru V) skládat (skládání je asociativní a nekomutativní). Navíc pro čtvercové matice platí identita $c \cdot (A \cdot B) = (c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B)$ a rovněž pro endomorfismy prostoru V platí identita $c \cdot (f \cdot g) = (c \cdot f) \cdot g = f \cdot (c \cdot g)$. Tyto dva příklady (a mnoho jiných) motivují zavedení pojmu *lineární algebra* nad tělesem T. V následujících partiích přednášky (maticová reprezentace homomorfismů) poznáme, že výše uvedené algebry (pokud je dimenze prostoru V rovna řádu uvažovaných matic) jsou *izomorfní*, tj. z algebraického hlediska nerozlišitelné. Jednotkovým prvkem algebry čtvercových matic je jednotková matice (značíme ji obvykle E), jednotkovým prvkem algebry endomorfismů prostoru V je identický automorfismus prostoru V (značíme jej obvykle 1_V).

Obecněji.

V obecnějším případě později uvidíme, že jsou izomorfní vektorový prostor Hom (U,V) a vektorový prostor příslušných matic: poznamenejme, že

U, V jsou prostory nad T, $\dim U = n$ a $\dim V = m$, matice typu $m \times n$ nad T.

Poznámka. Pokud je u vět kromě prvního důkazu ještě *jiný důkaz*, stačí znát jen ten první. Hloubavější si však pro dokonalejší porozumění látce mohou přečíst i tyto „jiné důkazy“.