Maticová reprezentace homomorfismů

K důkazu věty 11.2 (viz učebnice).

První implikace. Nechť A je matice homomorfismu f: $V \to W$ vzhledem k bázím $M = \{v_1,\dots,v_m\}$ a $N = \{w_1,\dots,w_n\}$. Musíme si uvědomit, že v j-tém sloupci matice $A = (a_{ij})$ jsou (podle definice matice homomorfismu) souřadnice obrazu j-tého vektoru báze M vzhledem k bázi N, tj. $f(v_j) = \sum a_{ij}w_i$. Musíme ukázat, kam se zobrazí libovolný vektor v prostoru V. Vektor v proto vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj. $v = \sum b_j v_j$, a tuto lineární kombinaci zobrazíme homomorfismem f, tj. $f(v) = f(\sum b_j v_j)$. Protože je f homomorfismus, je $f(v) = f(\sum b_j v_j) = \sum b_j f(v_j)$. Nyní dosadíme za $f(v_j)$ a máme $f(v) = f(\sum b_j v_j) = \sum b_j f(v_j) = \sum b_j (\sum a_{ij} w_i)$, a to se rovná $\sum (\sum a_{ij} b_j)\, w_i$. Vektor $f(v)$ jsme vyjádřili jako lineární kombinaci vektorů báze N, souřadnicemi vektoru $f(v)$ vzhledem k bázi N jsou tedy skaláry $\sum a_{ij} b_j$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy: první řádek matice A násobený sloupcem souřadnic vektoru v vzhledem k bázi M, druhý řádek matice A násobený sloupcem souřadnic vektoru v vzhledem k bázi M atd. Tím je vzorec (1) dokázaný.

Příklad 11.3(iii). Máme prostor všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše 5 (má dimenzi 6). Endomorfismus f tohoto prostoru přiřazuje každému polynomu jeho derivaci. Matici vzhledem k bázi

$$M = \{1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2,\ 1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4,\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\}$$

sestrojíme takto. Zobrazíme vektory báze endomorfismem f :

$1 \to 0$
$1 + x \to 1$
$1 + x + x^2 \to 1 + 2x$
$1 + x + x^2 + x^3 \to 1 + 2x + 3x^2$
$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \to 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$
$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \to 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

Získané obrazy vektorů báze M musíme vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze M.

$< 0 >_M = (0,0,0,0,0,0)$

$< 1 >_M = (1,0,0,0,0,0)$

$< 1+2x >_M = (-1,2,0,0,0,0)$, neboť $1 + 2x = -1 + 2(1+x)$

$< 1+2x + 3x^2 >_M = (-1,-1,3,0,0,0)$, neboť $1 + 2x + 3x^2 = -1 - (1+x) + 3(1+x+x^2)$

$<1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 >_M = (-1,-1,-1,4,0,0)$, neboť

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = -1 - (1+x) - (1+x+x^2) + 4(1 + x + x^2 + x^3)$

$< 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 >_M = (-1,-1,-1,-1,5,0)$, neboť

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = -1 - (1+x) - (1+x+x^2) - (1 + x + x^2 + x^3) + 5(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

[Vzhledem k tomu, že báze M je „hezká“, snadno zjistíme souřadnice obrazů, které jsme našli, vzhledem k bázi M.]

A nyní napíšeme získané koeficienty lineárních kombinací do sloupců matice:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Tak jsme získali matici endomorfismu f vzhledem k bázi M.