Metodická poznámka. Některé věci člověku nedocházejí ihned, potřebuje to čas, ale zejména vytrvalost. Neučit se nazpaměť bez porozumění, ale snažit se přijít věcem „na kloub“. Na druhé straně se definice pojmů musí člověk **s porozuměním naučit**, aby chápal to, co následuje. A pokud mu to není jasné, je třeba se vrátit k předchozímu. S matematikou je to jako se stavbou domu. Nelze budovat střechu, nejsou-li již základy, obvodové zdi atd. V matematice více než kdekoli jinde stavíme na předchozích poznatcích (definicích, větách a důsledcích).

Slovní interpretace věty 7.4. Jedná se důsledek axiomů (v) a (vi) vektorového prostoru, kterým se někdy ne zcela přesně říká *distributivní zákony*. Přepíšeme-li rovnost uvedenou ve větě 7.4 bez užití znaků $\sum$, uvidíme, že se jedná o **roznásobení závorek** (*obecný distributivní zákon*):

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \bullet (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = a_1u_1 + a_1u_2 + \ldots + a_1u_k + a_2u_1 + \ldots + a_2u_k + \ldots + a_mu_k$

Na pravé straně je mk součinů $a_i\, u_j$ (index i běží od 1 do m, index j od 1 do k).

Příklad 7.8(i). Uvažujme vektorový prostor všech vázaných vektorů v rovině, které vycházejí z pevně daného bodu (*počátek*). Tento vektorový prostor má tyto podprostory:

- *Nulový podprostor*, který sestává jen z nulového vektoru (vektor s počátkem i vrcholem v počátku).
- Podprostory všech vektorů, které vycházejí z počátku a jejich vrcholy leží na zvolené přímce procházející počátkem. Těch je nekonečně mnoho.
- *Nevlastní podprostor*, tj. množina všech vektorů roviny, které vycházející z počátku.

Obdobně pro vektorový prostor všech vektorů v prostoru, které vycházejí z pevně zvoleného bodu (*počátek*). Tam máme navíc podprostory všech vektorů, které vycházejí z počátku a jejich vrcholy leží na pevně zvolené rovině procházející počátkem.

Každé těleso je vektorovým prostorem samo nad sebou. Představme si dva exempláře daného tělesa T. Jeden exemplář budeme chápat jako *těleso* (jeho prvky se nazývají *skaláry*), druhý exemplář jako vektorový prostor (jeho prvky se nazývají *vektory*). [Pro inspiraci si dáme několik panáků, abychom těleso viděli dvakrát.] Násobení vektorů z T skaláry z T definujeme jako násobení prvků tělesa T. Ostatní operace již máme definovány. Všechny axiomy vektorového prostoru jsou splněny – vyplývají z platnosti axiomů tělesa T.

Jiný pohled. Nedělá-li nám problém příklad vektorového prostoru všech n-tic prvků tělesa T, stačí nyní položit $n = 1$ a máme příklad, o který se jedná: těleso samo nad sebou. Prvky vektorového prostoru T (pro odlišení od skalárů z T) můžeme chápat jako 1-tice zapisované v závorce: (a_1). Tak můžeme formálně v tomto příkladu odlišit vektory a skaláry (nedělá se to však).

Poznámka. Geometricky si vektory představujeme jako „šipky“ (příklad 7.8(i)). Je třeba si však uvědomit, že *povaha* vektorů abstraktního/obecného vektorového prostoru nás vůbec nezajímá. Definice vektorového prostoru o **povaze vektorů** vůbec nic neříká, **podstatné jsou pouze vlastnosti**, které jsou popsány v axiomech. Vektory jsou tedy *prvky jakéhokoli vektorového prostoru*. Tedy např. n-tice prvků nějakého tělesa, resp. matice, resp. funkce apod.

Příklad 7.8(ii). Množina obdélníkových matic pevně daného typu, které jsou sestavené např. z reálných čísel, je vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel. Tyto matice jsou **v tomto okamžiku** vektory a reálná čísla jsou skaláry. Opět je podstatné pouze to, že jsou splněny příslušné axiomy.

Prázdný součet, prázdná lineární kombinace, prázdný součin. Matematici jsou do jisté míry perfekcionisté, neradi mají výjimky, proto v řadě situací dotahují věci zcela do krajnosti, ad absurdum, což normálním lidem připadá (docela oprávněně) až úchylné. Je nám jasné, co je součet dvou, tří, čtyř čísel. Co je součet jen jednoho jediného čísla? Smíříme se poměrně snadno s tím, že je to **právě toto číslo**. Co však, když nesčítáme NIC??? Matematici se dohodli, že se to bude nazývat *prázdný součet* a že se bude rovnat NULE, přesněji *nulovému prvku*, pokud v dané množině existuje (nulový/neutrální prvek operace sčítání). Lineární kombinace je součet násobků nějakých vektorů, tj. vektorů, takže prázdná lineární kombinace je rovna (podle naší úmluvy) nulovému prvku vektorového prostoru, tedy nulovému vektoru. Podobně se zavádí *prázdný součin* jako *jednotkový prvek*, pokud v uvažované množině existuje (jednotkový/neutrální prvek operace násobení). Zavedením takovýchto „extrémních“ pojmů se v dalších úvahách vyhneme zbytečným předpokladům, které bychom ve větách museli formulovat (např. předpoklad, že uvažovaná množina je neprázdná, viz věta 7.12).

Věta 7.12. Dovětek „s koeficienty z tělesa T“ jen znovu zdůrazňuje, že jsou vektory násobeny výhradně skaláry z tělesa T. Mělo by to být samozřejmé, ale raději jsem to ve větě zdůraznil.

Příklad 7.13(iii). Lineární kombinace je vždy **konečný** součet násobků daných vektorů. Jedná-li se o vektory 1, x, x^2, x^3, x^4, … prostoru funkcí nad tělesem reálných čísel, tvoříme součty jejich násobků: $a_n \bullet 1 + a_{n-1} \bullet x + a_{n-2} \bullet x^2 + \ldots + a_1 \bullet x^{n-1} + a_0 \bullet x^n$. Musíme sčítat jen konečný počet vektorů, existuje tedy největší n, pro které je v lineární kombinaci násobek funkce x^n. Uvědomme si, že některé koeficienty mohou být nulové, tj. příslušné mocniny x v lineární kombinaci chybí.

Formálně nekonečný součet. Jedná se o **konečný součet**, kdy jsou sčítanci vybráni z nekonečné množiny, který je zapsaný jako nekonečný součet. Sčítáme tedy přes *nekonečnou množinu indexů* (např. přes všechna přirozená čísla), ale požadujeme, aby *skoro všechny sčítané prvky* byly nulové. Slovní spojení *skoro všechny* znamená v matematice: *až na konečný počet výjimek*. Tedy jen pro konečně mnoho indexů jsou sčítané prvky nenulové. Formálně nekonečná lineární kombinace může vypadat takto:

$$\sum a_i u_i = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

přitom jen konečně mnoho koeficientů a_i má nenulovou hodnotu (tj. skoro všechny koeficienty a_i jsou nulové). [*Běžný jazyk* se zde podstatně liší od matematického. Máte-li na vysvědčení samé pětky, můžete v matematickém smyslu říci, že máte skoro samé jedničky. Tedy až na konečně mnoho výjimek, což jsou všechny ty pětky.]

Formálně nekonečný součet je v řadě případů užitečný kvůli potížím, které bychom měli s operováním s konečnými součty, kdy sčítance vybíráme z nekonečné množiny. Pro nekonečně generované prostory se formálně nekonečný součet využije v některých důkazech, kdy (stejně jako pro konečně generované prostory) užijeme zápis

$$\sum a_i\, u_i + \sum b_i\, u_i = \sum (a_i+b_i)\, u_i$$

Pojem formálně nekonečného součtu vás nyní nemusí tak trápit. Časem se s ním několikrát setkáme a uvidíme jeho užitečnost (to již budeme zkušenější). Viz např. 7.18, kde můžeme srovnáním symbolického zápisu součtu dvou, tří, …, spočetně mnoha či nespočetně mnoha podprostorů pochopit smysl veškerých zápisů. Napomůže k tomu i následující příklad 7.19. Ke skutečnému, hlubšímu pochopení nekonečně generovaných prostorů, formálně nekonečných součtů a spojení nekonečně mnoha podprostorů nedojde ihned, potřebuje to čas a větší matematickou zkušenost. Zatím vás to nemusí trápit, dobré je se k těmto otázkám čas od času vrátit.

Ad 7.14(viii). Ve vektorovém prostoru V uvažujeme lineární obal vektorů $v_1, \ldots, v_k$, tj. podprostor $W = [v_1, \ldots, v_k]$. Obě uvedené rovnosti říkají, že se lineární obal vektorů $v_1, \ldots, v_k$ (tj. podprostor W) nezmění, jestliže

- některý z vektorů vynásobíme **nenulovým** skalárem,
- jakékoli násobky nějakého vektoru přičteme k **ostatním** vektorům.

Na základě těchto dvou jednoduchých tvrzení můžeme přetvářet (zjednodušovat) množinu generátorů podprostoru W. Velmi často se jedná o podprostor generovaný řádky nějaké matice, které postupně upravujeme, abychom zjistili tzv. *hodnost* matice, abychom vyřešili soustavu lineárních rovnic, transformovali matici bilineární či kvadratické formy apod. (to budeme později probírat). Přesně to se provádí v příkladu 7.17.

Konečně a nekonečně generované prostory. V první řadě je třeba rozlišovat *konečné* a *konečně generované* prostory. Všechny vektorové prostory nad racionálními, resp. reálnými, resp. komplexními čísly – kromě nulového – jsou nekonečné. Všechny vektorové prostory Q^n, R^n, C^n , kde n je přirozené číslo, jsou konečně generované, neboť snadno uvedeme jejich n-prvkovou množinu generátorů (je to dokonce tzv. *báze* – to zjistíme v příštím týdnu):

$$M = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1)\}$$

(v každé n-tici je jen jedna jednička). Naproti tomu jsou všechny prostory $Z_p^{\,n}$ konečné, mají p^n prvků. Všechny jsou konečně generované ze stejného důvodu, výše uvedená množina je její množinou generátorů. Tvoříme-li ve výše uvedených prostorech Q^n, R^n, C^n, $Z_p^{\,n}$ lineární kombinace vektorů množiny M, musíme za koeficienty těchto lineárních kombinací brát výhradně skaláry z příslušného tělesa, tedy po řadě z Q, R, C, Z_p.

Disjunktní sjednocení M množin M_1, M_2, …, M_k je sjednocení, kdy jsou každé dvě sjednocované množiny M_i a M_j , kde $i \neq j$, disjunktní. Současně říkáme, že množina M je disjunktně rozložena na množiny M_i .

Lemma 7.21. Zde jsou popsány vlastnosti lineárních množin zavedených definicí 7.20. Některé jsou zcela triviální. Není třeba se je učit nazpaměť, v případě potřeby by si tyto vlastnosti měl člověk uvědomit. Např. to, že *každý vektor leží v lineární množině, kterou určuje* – viz (i). *Disjunktní rozklad* vektorového prostoru V na lineární množiny určené podprostorem W odpovídá standardním postupům, s nimiž se setkáváme v obecné algebře. Jedná se o tzv. *faktorizaci* (grupy podle normální podgrupy, okruhu podle ideálu atd.). Vektorový prostor V je *disjunktním sjednocením* všech lineárních podmnožin určených podprostorem W. [Rozkrájíme-li štangli salámu na kolečka, udělali jsme její disjunktní rozklad – odhlédneme od drobečků. Celá štangle salámu je disjunktním sjednocením získaných koleček. Vektorový prostor krájíme pouze v mysli, drobečky zde žádné nejsou.]

K příkladu 7.22. Uvažujme vektorový prostor V všech vázaných vektorů vycházejících z pevně zvoleného bodu a jeho podprostor W všech vektorů ležících na přímce p procházející počátkem. Přímek rovnoběžných s přímkou p je nekonečně mnoho. Uvažujeme-li dvě různé přímky r, s rovnoběžné s přímkou p, pak je zřejmé, že množina vektorů vycházejících z počátku, které mají vrchol na přímce r, a množina vektorů vycházejících z počátku, které mají vrchol na přímce s, jsou disjunktní. Vektorový prostor V je proto disjunktním sjednocením všech lineárních množin $v+W$, resp. je disjunktně rozložen na lineární množiny $v+W$, kde vektor v probíhá celý prostor V.

Pojem faktorového prostoru v lineární algebře není potřebný. Druhá část odstavce 7.22 a odstavce 7.23 a 7.24 jsou zde uvedeny jen jako jistá průprava pro obecnou algebru, kde je faktorizace vysoce důležitá. Faktorový prostor V/W (prostoru V podle podprostoru W) je prostorem, jehož prvky=vektory jsou všechny lineární množiny $v+W$. Pokud je podprostor W nulový, tj. $W = O$, jedná se o lineární množiny $v+O = v$, tedy vlastně o vektory prostoru V. Tedy $V/O = V$. Pokud je $W = V$, existuje jen jedna lineární množina: $v+V = V$, faktorový prostor je jednoprvkový, tj. nulový. Proto je tedy $V/O = V$.

26. 10. 2020