**Metodická poznámka.** Před studiem další látky vždy doporučuji projít si předchozí definice a věty a oživit si je před dalším studiem. To jde pak **rychleji a snadněji.**

**Dotaz.** Proč zavádíme **soubor** vektorů a proč hovoříme o jeho lineární závislosti a nezávislosti?

**Odpověď.** Prvky množiny musí být vždy navzájem různé. Soubor se od množiny liší tím, že se v něm **mohou** prvky opakovat. Máme-li na vysvědčení samé jedničky, nemůžeme mluvit o *množině* známek na vysvědčení, ale o *souboru* známek. Uvažujeme-li matici, která má dva stejné řádky, nemůžeme mluvit o množině vektorů, které tvoří řádky této matice, ale o souboru vektorů. Jakmile se v souboru vektorů alespoň dva vektory opakují, je soubor lineárně závislý. Pokud jsou vektory souboru navzájem různé, jedná se o mno-žinu vektorů a její lineární závislost, resp. nezávislost je definována v 8.1.

**Lineární závislost/nezávislost podmnožiny a nadmnožiny**. Máme-li množinu *M*, která je lineárně závislá, je některý její vektor *v* lineární kombinací ostatních vektorů této množiny. Je-li *M* podmnožinou nějaké množiny *K*, je vektor *v* stále lineární kombinací ostatních vektorů množiny *M*, a tedy i vektorů množiny *K*, takže je *K* lineárně závislá. Jestliže je množina *L* podmnožinou množiny *M*, nemusí již být vektor *v* lineární kombinací ostatních vektorů množiny *L*, protože některý z vektorů původní lineární kombinace již v množině *L* nemusí být. Tedy:

> *Nadmnožina lineárně závislé množiny je lineárně závislá.*
>
> *Podmnožina lineárně závislé množiny může být závislá i nezávislá. Záleží na tom, jaké vektory ubereme*.
>
> Důsledkem je:
>
> *Podmnožina lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá.*
>
> *Nadmnožina lineárně nezávislé množiny může být závislá i nezávislá. Záleží na tom, jaké vektory přidáme.*

**Příklad 8.2(iii).** Uvedené dva vektory jsou lineárně závislé jako vektory prostory $C^3$ nad tělesem *C*, neboť druhý je (1–i)-násobkem prvního. Prostor $C^3$ však můžeme chápat rovněž jako prostor nad tělesem reálných čísel *R*, skaláry jsou tedy nyní pouze reálná čísla. V tomto případě již není druhý vektor násobkem prvního – pro žádné reálné číslo *r* není $2 = r(1+2i)$. Poznámka. Představíme-li si komplexní čísla jako vektory (v tzv. Gaussově rovině), můžeme prostor $C^3$ nad $R$ chápat jako prostor trojic vektorů, resp. šestic reálných čísel. Jedná se tedy o vektory

$$(1, 1, 0, 2, 0, -1) \quad \text{a} \quad (2, 0, 2, 2, -1, -1).$$

Ihned je vidět, že jeden není násobkem druhého.

**Důkaz 8.3.** Ekvivalence (i) ⇔ (ii) je jednoduchá, je třeba se trochu oprostit od symbolických zápisů a podívat se na podstatu věci.

Je-li některý vektor $v$ lineární kombinací ostatních vektorů množiny $M$, napíšeme příslušnou lineární kombinaci a vektor $v$ převedeme na druhou stranu. Tím získáme lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru. Je netriviální, neboť u vektoru $v$ je koeficient –1.

Jestliže naopak existuje netriviální kombinace vektorů množiny $M$, která je rovna nulovému vektoru, převedeme na druhou stranu některý násobek $av$ vektoru $v$, kde $a$ je nenulový koeficient. Nyní vynásobíme získanou rovnost skalárem $a^{-1}$ a tím získáme vyjádření vektoru $v$ jako lineární kombinaci ostatních vektorů množiny $M$.

**Příklad 8.5(ii).** Jestliže se jedná o vektory z prostoru nad tělesem $T$, které nemá charakteristiku 2, jsou lineárně nezávislé, jak se vypočetlo pomocí soustavy rovnic:

vyšlo $2a = 0$, tedy $a = 0$ a odtud $b = 0$, $c = 0$.

**Pokud by však těleso T mělo charakteristiku 2** (např. $Z_2$), potom je $1 + 1 = 2 = 0$. Při řešení soustavy rovnic nám vyšlo $2a = 0$. Vzhledem k tomu, že $2 = 0$, neplyne odtud **vůbec nic** o skaláru $a$. V prostoru nad tělesem charakteristiky 2 je

$$(u+v) + (u+w) + (v+w) = 2u + 2v + 2w = o + o + o = o.$$

Máme zde tedy netriviální lineární kombinaci daných vektorů (koeficienty jsou rovny 1), která je rovna nulovému vektoru. Jsou tedy lineárně závislé.

**Příklad 8.10(vii).** Podle definice 8.9 je *báze* prostoru $V$ charakterizována dvěma vlastnostmi. Je **lineárně nezávislá** a **generuje prostor *V***.

V příkladu je v prostoru $T^N$ všech nekonečných posloupností prvků tělesa $T$ uvažována množina vektorů

$$M = \{(1,0,0,\dots), (0,1,0,0,\dots), (0,0,1,0,\dots), \dots\}$$

Je nekonečná (spočetná), je zřejmě lineárně nezávislá. Není bází prostoru $T^N$, neboť není jeho množinou generátorů. Nekonečná posloupnost samých jedniček $(1,1,1,\dots)$ se totiž nedá vyjádřit lineární kombinací vektorů množiny $M$. Připomeňme, že lineární kombinace je **konečný** součet.

Množina $M$ však je bází jakéhosi podprostoru prostoru $T^N$, který je utvořen všemi lineárními kombinacemi vektorů množiny $M$. Je to tedy prostor všech nekonečných posloupností prvků tělesa $T$, které mají **jen konečně mnoho nenulových složek**. Značíme jej někdy $\mathrm{K}(T^N)$.

**Příklad 8.10(viii).** Množina $M = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů v prostoru $F$ všech reálných funkcí definovaných na celém reálném oboru. (Žádná z těchto funkcí není lineární kombinací ostatních.) Množina $M$ generuje v prostoru $F$ podprostor $R[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty, tj. funkcí

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n,$$

kde $n$ je nějaké přirozené číslo (nebo nula).

Obecněji můžeme uvažovat množinu $M = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$ jako bázi prostoru polynomů prostoru $T[x]$, kde $T$ je libovolné těleso. I zde bychom mohli zavést prostor $F$ všech funkcí definovaných na tělese $T$ s funkčními hodnotami z tělesa $T$, tj. prostor všech zobrazení tělesa $T$ do tělesa $T$.

**Příklad 8.10(ix).** Uvažujme prostor $V$ všech reálných funkcí definovaných na intervalu $(a, b)$. Množinou $M$ nechť je množina všech funkcí na intervalu $(a, b)$, které mají v jednom jediném bodě intervalu $(a, b)$ hodnotu 1 a ve všech ostatních bodech hodnotu 0. [Je jich přesně tolik, kolik je reálných čísel v intervalu $(a, b)$, tj. nespočetně mnoho.] Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, žádná z nich totiž není lineární kombinací ostatních. Funkce množiny $M$ generují (tj. všechny možné jejich lineární kombinace dávají) pouze takové funkce, které mají na intervalu $(a, b)$ jen konečně mnoho nenulových hodnot. Těch je sice hodně, ale zdaleka to nejsou všechny funkce prostoru $V$. Množina $M$ tedy není množinou generátorů, a tedy ani bází prostoru $V$.

31. 10. 2020