Spočetnost a nespočetnost. Domnívám se, že problémy související s nekonečně generovanými prostory, nekonečnými bázemi, formálně nekonečnými součty atd. souvisí s nekonečnem. Pokusím se něco zopakovat a vysvětlit.

Spočetnou množinou rozumíme každou množinu M, **na kterou se dá vzájemně jednoznačně** zobrazit množina přirozených čísel, tj. existuje **prosté** zobrazení množiny všech přirozených čísel, tj. množiny $\{1, 2, 3, \ldots\}$ **na** množinu M. Jinými slovy: prvky množiny M je možno *indexovat* přirozenými čísly, $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$. (Někdy se pod spočetné množiny zařazují i konečné množiny.) *Nespočetné množiny* jsou „větší" než spočetné. Jejich prvků je tak mnoho, že žádné zobrazení množiny přirozených čísel **na** takovouto množinu neexistuje. Všechny prvky takovéto množiny není možno indexovat přirozenými čísly.

Spočetnými množinami jsou např. množina celých čísel a množina racionálních čísel. Nesmí nás plést laický pohled, že celých čísel je více než přirozených a racionálních je více než celých. Je třeba rozlišovat relaci *být podmnožinou* a relaci *mít stejnou mohutnost*. Množina všech přirozených čísel je **vlastn**í podmnožinou množiny všech celých čísel, a ta je **vlastní** podmnožinou množiny všech racionálních čísel. Mohutnosti těchto tří množin jsou však stejné, celá, resp. racionální čísla je možno indexovat přirozenými čísly. Mohutnost množiny všech reálných čísel je větší než mohutnost množiny přirozených čísel, množina všech reálných čísel je *nespočetná*. Stejně tak množina všech komplexních čísel: má stejnou mohutnost jako množina reálných čísel, ačkoliv je její nadmnožinou.

Mohutnost množiny všech přirozených čísel se označuje symbolem $\aleph_0$ (*alef nula*).

Báze a dimenze.

Vynecháme-li z nekonečné báze (nekonečně generovaného) prostoru V jeden prvek, dostaneme opět nekonečnou množinu, která je bází **vlastního** podprostoru prostoru V. Vynecháme-li další vektor, máme opět nekonečnou množinu, která je bází ještě menšího podprostoru atd. Takto můžeme stále pokračovat. Dostáváme posloupnost podprostorů, které se stále zmenšují, mají však stále stejnou dimenzi. Přitom nezáleží na tom, zda je výchozí báze spočetná nebo nespočetná.

Příklad. Uvažujme vektorový prostor všech polynomů s reálnými koeficienty – značíme jej obvykle $R[x]$. Jeho bází je například nekonečná (**spočetná**) množina

$$M = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\},$$

proto má prostor $R[x]$ dimenzi **alef nula**. [Připomínám, že polynomy jsou lineární kombinace vektorů báze M, tj. **konečné** součty násobků vektorů $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$]

Odebírejme postupně z množiny M jednotlivé prvky – dostáváme nekonečné množiny

$$\{ x, x^2, x^3, x^4, \ldots\},$$
$$\{ x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\},$$
$$\{ x^3, x^4, x^5, x^6, \ldots\} \quad \text{atd.}$$

Jsou to báze podprostorů prostoru $R[x]$, které sestávají z

- polynomů bez absolutního členu,
- polynomů bez absolutního a lineárního členu,
- polynomů bez absolutního, lineárního a kvadratického členu atd.

Dostáváme tedy posloupnost podprostorů původního prostoru $R[x]$, které se stále zmenšují, ale mají stále stejnou dimenzi (**alef nula**).

V prostoru **nekonečně generovaném** vždy existují **vlastní** podprostory, které mají **stejnou** dimenzi. Toto nemůže nastat pro konečně generovaný prostor. Když z jeho báze odebereme jeden prvek, dostaneme podprostor, který má o jedničku menší dimenzi než výchozí prostor. Vlastní podprostor **konečně generovaného** prostoru musí mít **menší** dimenzi.

V prostoru T^N všech nekonečných posloupností prvků tělesa T **neumíme napsat bázi**. Vezmeme-li nekonečnou (spočetnou) množinu

$$\{(1,0,0,0,\ldots), (0,1,0,0,\ldots), (0,0,1,0,\ldots), (0,0,0,1,\ldots), \ldots\},$$

snadno zjistíme, že je lineárně nezávislá, i to, že není bází prostoru T^N, neboť není množinou generátorů prostoru T^N. Uvědomme si, že generuje jen velice málo prvků prostoru T^N, pouze ty, které mají jen konečně mnoho nenulových složek. Prostor T^N je obrovský!

Obrovský je též prostor všech *reálných funkcí* na intervalu (a, b). Obrovský je i jeho vlastní podprostor všech *spojitých* funkcí. Dimenze obou těchto prostorů je nespočetná! Neumíme napsat báze těchto prostorů. Jejich **malinkým** podprostorem je prostor všech polynomů, který má spočetnou bázi, a tedy dimenzi alef nula.

V prostoru nekonečné dimenze je pro pohodlné formální odvozování a dokazování užíván formálně nekonečný součet (formálně nekonečná lineární kombinace). *Formálně nekonečný* se nazývá proto, že představuje součet *nekonečně* mnoha vektorů; ve skutečnosti se jedná o *konečný součet*, neboť předpokládáme, že **skoro všechny sčítané vektory jsou nulové**.

Důkaz věty 8.13. Důkaz je možno u zkoušky provést pro konečně generovaný prostor, tj. užít symboliku $\sum a_i v_i$. místo $\sum a_v v$.

Dimenze lineární množiny. *Dimenzí lineární množiny $u+W$* rozumíme dimenzi podprostoru, který ji určuje, tj. dimenzi podprostoru W. Toto zavedení je jen určitá pomůcka pro partii o soustavách lineárních rovnic. *Množina všech řešení takové soustavy je v obecném případě právě lineární množinou.* Protože se velmi často hovoří o dimenzi řešení soustavy lineárních rovnic, zavedl jsem i dimenzi lineární množiny jako pomocný pojem. Není třeba nad tím hloubat, je třeba vědět, co je dimenze vektorového prostoru (a podprostoru).

Dimenze vektorového prostoru je počet prvků (mohutnost) jeho libovolné báze. V prostoru $T^{n\times m}$ všech matic typu $n\times m$ nad tělesem T je bází například množina $n\cdot m$ matic, v nichž je vždy pouze jedna jednička a jinak samé nuly, přitom pro polohu jedničky máme $n\cdot m$ možností. Tyto matice jsou evidentně lineárně nezávislé a každá matice typu $n\times m$ je jejich lineární kombinací. Je to obdoba kanonické báze prostoru T^n.

Uvažujme těleso T, které **nemá** charakteristiku 2. Podprostor všech symetrických matic prostoru $T^{n\times n}$ má bázi, která je tvořena symetrickými maticemi dvou typů: n matic má na diagonále jednu jedničku a jinak všude samé nuly a ½n(n–1) matic má na souměrných místech (ij a ji) jedničky a jinde samé nuly. Celkem tedy ½n(n+1) matic. Opět je jasné, že jsou lineárně nezávislé a že každá symetrická matice je jejich lineární kombinací. Obdobně zjistíme, jak vypadá báze podprostoru antisymetrických matic: ½n(n–1) matic má na souměrných místech (ij a ji) jedničku a minus jedničku a jinde samé nuly. A tak jsme zjistili dimenze těchto podprostorů. Vypište si všechny matice těchto bází pro $n = 2$, $n = 3$ a $n = 4$.

Pozor. Jedná-li se o těleso charakteristiky 2, je to trochu jinak. Například matice, v níž jsou samé jedničky, je jak symetrická, tak antisymetrická (je totiž 1 = – 1).

V příkladu **8.19(x)** je na množině R^+ všech kladných reálných čísel (chápeme je jako vektory) definováno sčítání. Dále je zavedeno násobení prvků množiny R^+ (tedy vektorů) skaláry z tělesa R. Obě operace nám mohou připadat nezvyklé. Prověřte, že splňují všechny axiomy vektorového prostoru. Zvykneme-li si na tyto podivně definované operace, je zřejmé, že axiomy platí (přepište si je pro tyto podivné operace). Jakmile se s definicemi těchto operací „smíříme“, bude jasné, že libovolně zvolený vektor v z prostoru R^+ lze napsat jako násobek pevně daného vektoru $u \neq 1$, tj. $v = u^a$. Umíme odtud zjistit skalár a ? Bází je tedy jednoprvková množina $\{u\}$, kde u je libovolně zvolené číslo (vektor) z R^+, které není rovno 1.

9. 11. 2020