Jádro homomorfismu f: $V \text{–>} W$ je množina všech vektorů prostoru V, které se zobrazí na nulový vektor prostoru W. Jinými slovy je to **úplný vzor** nulového vektoru prostoru W, resp. **úplný vzor** nulového podprostoru O prostoru W.
Jádro **je podprostorem prostoru** V: zobrazují-li se dva vektory na nulový vektor, zobrazuje se na nulový vektor i jejich součet a rovněž jejich násobky: je-li $f(x) = o$ a $f(y) = o$, je zřejmě (podle vlastností homomorfismu)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o, \qquad f(a \cdot x) = a \cdot f(x) = a \cdot o = o.$$

Příklad. Uvažujme endomorfismus f prostoru všech polynomů s reálnými koeficienty, který každému polynomu přiřazuje jeho derivaci. Jádrem Ker f je podprostor všech konstantních polynomů, neboť právě takovéto polynomy (konstanty) mají nulovou derivaci. Ker f = [1]. Tj. jádro je generováno konstantním polynomem $f(x) = 1$, dimenze jádra je tedy 1.

Příklad. Homomorfismus f: $R^3 \to R^2$ definovaný přiřazením

$$(x, y, z) \;\to\; (3x+2y,\, x\text{–}z)$$

má jádro Ker f = [(2,–3,2)], tj. na nulový vektor se zobrazí všechny násobky vektoru (2,–3,2), jak zjistíme řešením soustavy rovnic $3x + 2y = 0$, $x - z = 0$.
[Potřebujeme totiž najít všechny vektory (x, y, z), pro které $f((x, y, z)) = (0,0)$.]

Jestliže je jádro nulové, tj. Ker $f = O$, říkáme též, že je *triviální* (jádro je *nulový*, tj. *triviální* prostor). Ve výše uvedených příkladech je jádro *netriviální*, tj. *nenulové*.

V příkladu 10.2.(iv) se spojité funkci $v(t)$ přiřadí funkce $w(x)$ pomocí určitého integrálu. Představte si pro jednoduchost, že je $v(t) = t^3 + 2t^2 - t + 1$, nyní $v(t)$ „zintegrujeme“, dostaneme $\frac{1}{4} t^4 + {}^2/_3\, t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t$. Nyní utvoříme rozdíl hodnot, kdy za t dosadíme x a za t dosadíme nulu (horní a dolní mez integrálu) a odečteme výsledky. [Při dosazení nuly vyjde nula.] Dostaneme $\frac{1}{4} x^4 + {}^2/_3\, x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x$. [Toto byl velmi populární výklad.]

Vnoření podprostoru U prostoru V do prostoru V znamená, že všechny vektory prostoru U zobrazíme na ty samé vektory chápané ovšem jako vektory prostoru V.

Příklad. Uvažujme prostor $V = R^3$ všech trojic reálných čísel a jeho podprostor U všech trojic s třetí složkou nulovou. Vnoření U do V je tedy monomorfismus f: $U \to V$ určený předpisem $f(x, y, 0) = (x, y, 0)$. Poznamenejme, že nejsou určeny obrazy vektorů (x, y, z), kde z je nenulové, neboť zobrazení f je definováno pouze na podprostoru U.

Příklad 10.3(iii) můžeme vynechat. Nicméně poznamenávám: Nechť je U podprostor prostoru V. Snadno usoudíme, že zobrazení f, které vektoru v z V přiřadí lineární množinu $v + U$, má vlastnosti homomorfismu, neboť splňuje jeho definující vlastnosti:

$$f(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) + U = (v_1 + U) + (v_2 + U) = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(a.v) = a \cdot v + U = a \cdot (v + U) = a \cdot f(v).$$

Lineární množiny $v + U$ jsou prvky (tj. vektory) tzv. *faktorového prostoru*. [Tento pojem jsme však vynechali.] Jedná se o epimorfismus prostoru V na faktorový prostor V/U .

Úplný vzor podprostoru je podprostor. Nechť f: $U \rightarrow V$ je homomorfismus. Úplným vzorem podprostoru W prostoru V je množina X všech vektorů prostoru U, které se zobrazí do podprostoru W. Musíme ověřit, že X je podprostorem prostoru U. Ověříme tedy definující vlastnosti podprostoru (uzavřenost na součet a násobek). Jestliže x_1 a x_2 jsou prvky množiny X, leží $f(x_1)$ a $f(x_2)$ v podprostoru W. Protože je W podprostor, leží v množině X i jejich součet, tj. $f(x_1) + f(x_2)$ je prvkem množiny X. Protože je f homomorfismus, je $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1+x_2)$, a proto $x_1 + x_2$ leží v množině X. Množina X je tedy uzavřená na sčítání. Obdobně se dokáže uzavřenost na násobení skalárem.

Obecná poznámka. Máme-li určit jádro nebo obraz homomorfismu, případně jakýkoli podprostor, je nejvhodnější najít nějakou jeho **bázi**. Z toho důvodu z nalezené množiny generátorů vynecháváme vektory, které jsou závislé na ostatních. **S bází se totiž dobře pracuje**, neboť každý vektor uvažovaného podprostoru je možno vyjádřit **jediným způsobem** jako lineární kombinaci vektorů báze, jak již víme.