Obtížný příklad: Okruh a jeho podokruhy

Uvažujme všechny reálné funkce na intervalu $(-\infty, \infty)$. Sčítejme je a násobme v každém bodě, tj. pro každé reálné číslo sečteme či vynásobíme funkční hodnoty příslušných dvou funkcí. Vzhledem k těmto operacím dostáváme komutativní okruh R s jednotkovým prvkem (funkce identicky rovna jedné pro všechna reálná čísla), který má netriviální dělitele nuly, jak nyní ukážeme.

Uvažujme nějakou **nenulovou** funkci f, která je rovna nule na intervalu $(-\infty, 0)$, a nějakou **nenulovou** funkci g, která je rovna nule na intervalu $(0, \infty)$. Pro každé reálné číslo x je zřejmě $f(x) \bullet g(x) = 0$, tedy $f \bullet g$ je **nulová** funkce. Funkce f a g jsou proto netriviálními děliteli nuly v okruhu R.

V okruhu R budeme uvažovat následující podokruhy:

Podokruh R_1 všech funkcí, které jsou rovny nule mimo interval $(-1, 1)$.

Podokruh R_2 všech funkcí, které jsou rovny nule mimo interval $(-2, 2)$.

Podokruh R_3 všech funkcí, které jsou rovny nule mimo interval $(-3, 3)$.

Podokruh R_4 všech funkcí, které jsou rovny nule mimo interval $(-4, 4)$.

Atd.

Je zřejmé, že R_1 je poodkruhem okruhu R_2 , R_2 je poodkruhem okruhu R_3 , R_3 je poodkruhem okruhu R_4 atd. Každý z těchto podokruhů R_k má svůj vlastní jednotkový prvek – je to funkce identicky rovná jedné na intervalu $(-k, k)$ a rovná nule všude jinde. Všechny tyto jednotkové prvky jsou **navzájem různé**.

Sjednocení všech těchto (nekonečně mnoha) okruhů označme R_∞ , je to **vlastní** podokruh okruhu R, neboť např. funkce identicky rovná jedné na $(-\infty, \infty)$ (tj. jednotkový prvek okruhu R) není prvkem okruhu R_∞, neboť neleží v žádném podokruhu R_k .

Podokruh R_∞ nemá jednotkový prvek. Musela by to být funkce identicky rovná nule na celém intervalu $(-\infty, \infty)$, ta však v okruhu R_∞ neleží.