Materiál k přednášce z lineární algebry – letní semestr

Cílem následujících příkladů je praticky procvičit řadu pojmů, jejich vzájemné vztahy, souvislosti a ukázat početní techniku:

Jedná se zejména o tyto pojmy a vztahy: charakteristická matice, charakteristický polynom, minimální polynom, vlastní čísla, vlastní vektory, spektrum, stopa, vztah koeficientů charakteristického polynomu k výchozí matici (stopa, determinant, hlavní subdeterminanty), resp. se spektrem matice, dále Jordanův kanonický tvar, diagonalizovatelnost, výpočet Jordanova kanonického tvaru, výpočet inverzní matice pomocí minimálního polynomu, výpočet transformační matice, pomocí níž se daná matice převádí na Jordanův kanonický tvar atd.

Příklad 1.

Mějme reálnou matici $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Její charakteristickou maticí je matice $\quad \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix}.$

Charakteristickým polynomem matice A je polynom

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = (\lambda-1)(\lambda-3)^2.$$

Charakteristický polynom je rozložitelný na lineární faktory, matice A má tedy Jordanův kanonický tvar.

Spektrum matice A je soubor všech jejích vlastních čísel (s ohledem na násobnost): $\{1, 3, 3\}$

Koeficienty charakteristického polynomu lze určit z matice a souvisí se spektrem (pokud je charakteristický polynom úplně rozložitelný):

$-7 = (-1)\cdot \mathrm{tr} A \qquad -7 = (-1)\cdot(1+3+3)$

$+15 = (-1)^2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) \qquad +15 = (-1)^2 \cdot \big(1\cdot 3 + 1\cdot 3 + 3\cdot 3\big)$

$-9 = (-1)^3 \cdot \det A \qquad -9 = (-1)^3 \cdot 1\cdot 3\cdot 3$

Matice A je regulární, neboť její charakteristický polynom má nenulový absolutní člen.

Minimální polynom matice A musí obsahovat všechny nerozložitelné faktory charakteristického polynomu a musí dělit charakteristický polynom.

Jsou tedy dvě možnosti: $(\lambda-1)(\lambda-3), \quad (\lambda-1)(\lambda-3)^2$.

Vzhledem k tomu, že matice $(A-E)(A-3E)$ je nulová (zjistí se výpočtem), je polynom $(\lambda-1)(\lambda-3)$ anulujícím polynomem matice A, a je to tedy její minimální polynom. Vzhledem k tomu, že je minimální polynom matice A úplně rozložitelný a má jednoduché kořeny, je matice A diagonalizovatelná. Jejím Jordanovým kanonickým tvarem je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Známe-li minimální polynom matice A, můžeme vypočítat inverzní matici A^{-1}. Je totiž

$$0 = A^2 - 4A + 3E,$$

odtud vynásobením inverzní maticí máme $0 = A - 4E + 3A^{-1}$, a tedy

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\big(4E - A\big) = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme vlastní vektory matice A příslušné k vlastním číslům 1, resp. 3. Znamená to vyřešit homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $\lambda E - A$ pro $\lambda = 1$, resp. 3. Pro vlastní číslo 1, resp. 3 řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešeními jsou podprostory prostroru $\mathbb{R}^3$, a sice $[(2,-1,1)]$, resp. $[(1,1,0),(0,1,-1)]$.

Máme tedy tři lineárně nezávislé vektory, které tvoří bázi $\{(2,-1,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Matice přechodu B od této báze ke kanonické bázi má ve sloupcích právě tyto vektory.

Je tedy $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.

Mějme opět reálnou matici $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristickou maticí je matice $$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 7 & -8 \\ -6 & 7 & \lambda - 7 \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A je polynom

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Charakteristický polynom je rozložitelný na lineární faktory, matice A má tedy Jordanův kanonický tvar.

Spektrum matice A je soubor všech jejích vlastních čísel (s ohledem na násobnost): $\{-1,-1,3\}$

Koeficienty charakteristického polynomu lze určit z matice a souvisí se spektrem (pokud je charakteristický polynom úplně rozložitelný):

$$-1 = (-1) \cdot \mathrm{tr} A \qquad -1 = (-1) \cdot \big((-1) + (-1) + 3\big)$$

$$-5 = (-1)^2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \right) \qquad -5 = (-1)^2 \cdot \big((-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 + (-1) \cdot 3\big)$$

$$-3 = (-1)^3 \cdot \det A \qquad -3 = (-1)^3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3$$

Matice A je regulární, neboť její charakteristický polynom má nenulový absolutní člen.

Minimální polynom matice A musí obsahovat všechny nerozložitelné faktory charakteristického polynomu a musí dělit charakteristický polynom.

Jsou tedy dvě možnosti: $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, $(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$.

Vzhledem k tomu, že matice $(A + E)(A - 3E)$ není nulová (zjistí se snadno výpočtem), není polynom $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$ anulujícím polynomem matice A, minimální polynom matice A je tedy roven polynomu charakteristickému. Vzhledem k tomu, že je minimální polynom matice A, tj. polynom $(\lambda+1)^2(\lambda-3)$, úplně rozložitelný, ale nemá jednoduché kořeny, není matice A diagonalizovatelná. Jejím Jordanovým kanonickým tvarem je matice (s vlastními čísly matice A na diagonále)

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Známe-li minimální polynom matice A, můžeme vypočítat inverzní matici A^{-1}. Je totiž

$$0 = A^3 - A^2 - 5A - 3E,$$

odtud vynásobením inverzní maticí máme $0 = A^2 - A - 5E - 3A^{-1}$, a tedy

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(A^2 - A - 5E\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 20 & -17 & 8 \\ 14 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme vlastní vektory matice A příslušné k vlastním číslům -1, resp. 3. Znamená to vyřešit homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $\lambda E - A$ pro $\lambda = -1$, resp. 3. Pro vlastní číslo -1, resp. 3 řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -6 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešeními jsou podprostory prostroru $\mathbb{R}^3$, a sice $[(1,2,1)]$, resp. $[(1,2,2)]$.

Máme tedy pouze dva lineárně nezávislé vektory, které netvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Je třeba dva nalezené vektory doplnit dalším vhodným vektorem. Pro jednoduché vlastní číslo 3 máme jeden vlastní vektor, pišme $v_1 = (1,2,2)$, pro dvojnásobné vlastní číslo -1 máme jen jeden vektor, pišme $v_3 = (1,2,1)$. Hledáme tedy vektor v_2, pro který je $A \cdot v_2 = (-1) \cdot v_2 + v_3$ (viz druhý sloupec matice J).

Hledáme tedy vektor v_2 jako řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $(A + E) \cdot x = v_3$. Rozšířená matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \end{array}\right).$$

Řešením je např. vektor $v_2 = (-1,1,0)$. Tím jsme získali hledanou bázi $\{(1,2,2),(-1,1,0),(1,2,1)\}$.

Matice přechodu B od této báze ke kanonické bázi má ve sloupcích právě tyto vektory.

Je tedy $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.

Mějme opět reálnou matici $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristickou maticí je matice $$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A je polynom

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3.$$

Charakteristický polynom je rozložitelný na lineární faktory, matice A má tedy Jordanův kanonický tvar.

Spektrum matice A je soubor všech jejích vlastních čísel (s ohledem na násobnost): $\{2,2,2\}$

Koeficienty charakteristického polynomu lze určit z matice a souvisí se spektrem (pokud je charakteristický polynom úplně rozložitelný):

$-6 = (-1) \cdot \mathrm{tr} A \qquad -6 = (-1) \cdot \left(2 + 2 + 2\right)$

$$12 = (-1)^2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) \qquad 12 = (-1)^2 \cdot \big(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2\big)$$

$$-8 = (-1)^3 \cdot \det A \qquad -8 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Matice A je regulární, neboť její charakteristický polynom má nenulový absolutní člen.

Minimální polynom matice A musí obsahovat všechny nerozložitelné faktory charakteristického polynomu a musí dělit charakteristický polynom.

Jsou tedy tři možnosti: $\lambda - 2$, $(\lambda - 2)^2$, $(\lambda - 2)^3$ (první evidentně nepadá v úvahu, neboť polynom $\lambda - 2$ není anulující).

Vzhledem k tomu, že matice $(A - 2E)^2$ je nulová (zjistí se snadno výpočtem), je polynom $(\lambda - 2)^2$ anulujícím polynomem matice A, tj. minimálním polynomem matice A. Je sice úplně rozložitelný, ale nemá jednoduché kořeny, matice A není proto diagonalizovatelná.

Známe-li minimální polynom matice A, můžeme vypočítat inverzní matici A^{-1}. Je totiž

$$0 = A^2 - 4A + 4E,$$

odtud vynásobením inverzní maticí máme $0 = A - 4E + 4A^{-1}$, a tedy

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \big(4E - A\big) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme vlastní vektory matice A příslušné k vlastnímu číslu 2. Znamená to vyřešit homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\lambda E - A$ pro $\lambda = 2$. Řešíme tedy homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, a sice $[(0,0,1),(1,2,0)]$.

Máme tedy pouze dva lineárně nezávislé vektory, které netvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů je roven počtu Jordanových buněk. Jordanovým kanonickým tvarem matice A je proto matice

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Je třeba najít třetí vektor a připojit jej k již nalezeným vlastním vektorům. Pišme $v_1 = (0,0,1)$ a $v_3 = (1,2,0)$ a hledejme vektor v_2, pro který je $A \cdot v_2 = 2 \cdot v_2 + v_3$ (viz druhý sloupec matice J).

Vektor v_2 je tedy řešením nehomogenní soustavy lineárních rovnic $(A - 2E) \cdot x = v_3$. Rozšířenou maticí této soustavy je matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava nemá řešení, protože jsme špatně zvolili sloupec pravých stran, tj. vektor v_3. Neuspěli bychom ani volbou $v_3 = (0,0,1)$. Musíme zvolit vhodnou lineární kombinaci nalezených vlastních vektorů, které přísluší k vlastnímu číslu 2. Uspějeme s vektorem $v_3 = (1,2,1)$. Tomu odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

a řešení $v_2 = (0,1,0)$. Tím jsme získali hledanou bázi $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,2,1)\}$.

Matice přechodu B od této báze ke kanonické bázi má ve sloupcích právě tyto vektory.

Je tedy $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Příklad 4.

Mějme opět reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$

Její charakteristickou maticí je matice $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 3 & -2 \\ -8 & 6 & \lambda - 5 \end{pmatrix}.$

Charakteristickým polynomem matice A je polynom

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5).$$

Charakteristický polynom není rozložitelný v reálném oboru na lineární faktory, matice A tedy nemá nad $\mathbb{R}$ Jordanův kanonický tvar.

Spektrum matice A nad $\mathbb{R}$ je $\{1\}$.

Koeficienty charakteristického polynomu lze určit z matice a souvisí se spektrem (pokud je charakteristický polynom úplně rozložitelný):

$-5 = (-1) \cdot \mathrm{tr} A$

$9 = (-1)^2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \right)$

$-8 = (-1)^3 \cdot \det A$

Matice A je regulární, neboť její charakteristický polynom má nenulový absolutní člen.

Minimální polynom matice A musí obsahovat všechny nerozložitelné faktory charakteristického polynomu a musí dělit charakteristický polynom. Je roven charakteristickému polynomu.

Známe-li minimální polynom matice A, můžeme obdobně jako dříve vypočítat inverzní matici A^{-1}.

Matici A však můžeme chápat jako matici nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Pak je charakteristický polynom úplně rozložitelný na lineární faktory:

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2 - \mathrm{i})(\lambda - 2 + \mathrm{i}).$$

Spektrum matice A nad $\mathbb{C}$ je $\{1,\ 2 + \mathrm{i},\ 2 - \mathrm{i}\}$. Pomocí vlastních čísel je nyní možno vyjádřit koeficienty:

$-5 = (-1) \cdot \big(1 + (2 + \mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})\big)$

$9 = (-1)^2 \cdot \big(1 \cdot (2 + \mathrm{i}) + 1 \cdot (2 - \mathrm{i}) + (2 + \mathrm{i}) \cdot (2 - \mathrm{i})\big)$

$-5 = (-1)^3 \cdot 1 \cdot (2 + \mathrm{i}) \cdot (2 - \mathrm{i})$

Matice má Jordanův kanonický tvar, diagonální matici

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Obdobně jako dříve můžeme vypočítat vlastní vektory matice A příslušné k jednotlivý vlastním číslům a získat tak transformační matici B. Znamená to vyřešit homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\lambda E - A$ pro $\lambda = 2$, resp. $\lambda = 2 + \mathrm{i}$, resp. $\lambda = 2 - \mathrm{i}$. V komplexním oboru je výpočet méně příjemný.