Matematická analýza pro informatiky, LS 18/19

Příklady na cvičení 6 (29.3.2019)

Spočtěte primitivní funkce vhodnou substitucí, u každého příkladu zjistěte definiční obor původní (D_f) a primitivní funkce (D_F), a pokud bude třeba, použijte „lepení“.

1. $\int \frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$
2. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}dx$
3. $\int \frac{\sin x}{\sin x+1}dx$
4. $\int (x-3)\sqrt{\frac{x-3}{6-x}}dx$
5. $\int \frac{\cos x}{(\sin x-1)(\sin^2 x+1)}dx$
6. $\int \frac{dx}{\sin x+2}$

Řešení:

1. Substitucí $y = \operatorname{tg} x$ převedeme na $\int \frac{3y^2+1}{(y^2+3)(y^2+1)}dy$ a dopočtením získáme funkci $F(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}) - x$. Tato funkce však není definována v bodech tvaru $\frac{\pi}{2} + k\pi$ a nejde v nich spojitě dodefinovat, ovšem původní integrovaná funkce je definovaná a musí mít primitivní funkci v celém $\mathbb{R}$. Proto „lepíme“: na každém intervalu spojitosti posuneme fukncí $F(x)$ o konstantu (kterou určíme jako rozdíl limit v bodech nespojitosti zleva a zprava) a v příslušnou hodnotou dodefinujeme i v bodech nespojitosti, takže výsledná primitivní funkce v $\mathbb{R}$ je:
$$\begin{aligned} I(x) &= F(x) + \frac{4\pi k}{\sqrt{3}}, \ \ x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= \frac{4-\sqrt{3}+8k}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}, \ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$
2. Substitucí $y = \sqrt{\frac{2-x}{x-3}}$ převedeme na $\int \frac{2y^2}{(3y^2+2)(y^2+1)}dy$, a dopočteme $F(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-3}} - \frac{4}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{3(2-x)}{2(x-3)}}$ a $D_f = D_F = (2,3)$.
3. Řešení lze zapsat mnoha způsoby: $F(x) = x + \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} = x + \frac{2\sin x}{1+\sin x-\cos x} = x + \frac{2(1+\cos x)}{1+\sin x+\cos x} = x + \frac{\cos x}{\sin x+1} = x + \frac{1-\sin x}{\cos x}$ (zkuste je na sebe vzájemně převést). Lze řešit jednak substitucí $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, čímž to převedeme na $\int \frac{4y}{(y^2+1)(y+1)^2}$. Nebo třeba trikem $\frac{\sin x}{\sin x+1} = 1 - \frac{1}{\sin x+1}\frac{\sin x-1}{\sin x-1} = 1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$. $D_f = D_F = \mathbb{R} - \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$.
4. $\frac{27}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{6-x}} + \frac{1}{4}(x-6)(2x+3)\sqrt{\frac{x-3}{6-x}}$ a $D_f = D_F = (3,6)$.
5. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin x)$. Stačí $y = \sin x$, univerzální substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ zde vede na velmi škaredé výrazy. $D_f = D_F = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$.
6. Substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ vede na $\int \frac{dy}{y^2+y+1}$ a vyjde primitivní funkce $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}})$. Ta má ovšem menší definiční obor (než $D_f = \mathbb{R}$), musíme tedy lepit:
$$\begin{aligned} I(x) &= F(x) + \frac{2\pi k}{\sqrt{3}}, \ \ x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi k}{\sqrt{3}}, \ \ x = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$