

1. Spočítejte derivaci a uveďte, kde existuje... to spočítat].

$$f(x) = \ln(2 + \cos x^2) + \sqrt{\cos x}$$

2. Spočítejte pomocí vzorce pro derivaci inverzní funkce derivaci

$$f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1).$$

5. Rozložte na parciální zlomky $\frac{1}{x(1+x^2)^2}$.

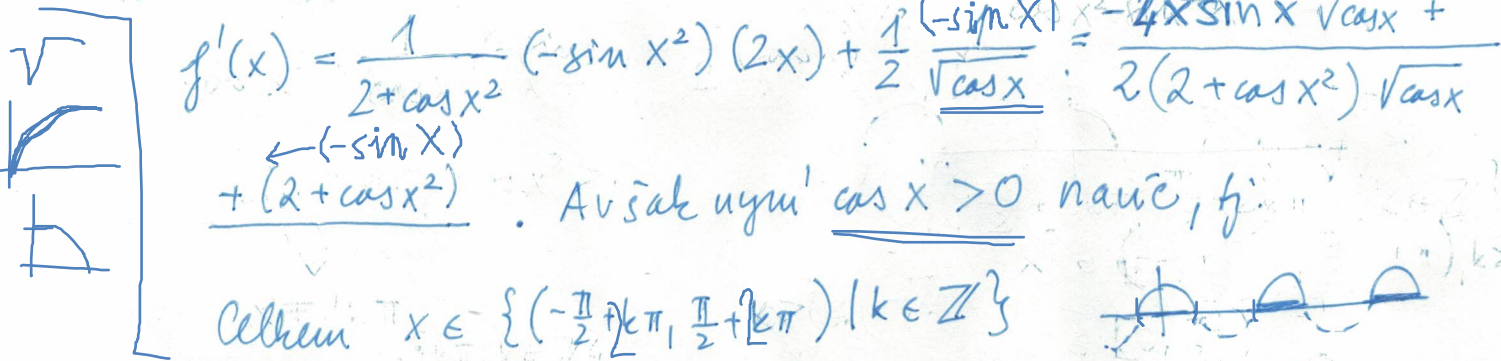
4. Spočítejte (per-partes integrací) $\int \sin^3 x \, dx$.

1. $f(x) = \ln(2 + \cos x^2) + (\cos x)^{\frac{1}{2}}$ $\cos x \geq 0$!

$f'(x) = \frac{1}{2 + \cos x^2} (-\sin x^2) (2x) + \frac{1}{2} \frac{(-\sin x)}{\sqrt{\cos x}} = \frac{-4x \sin x^2 \sqrt{\cos x} + (-\sin x)}{2(2 + \cos x^2) \sqrt{\cos x}}$

Av šale uym' $\cos x > 0$ nauč, f.

Celkem $x \in \{(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$



2. $f(x) = (\cos x)^{\ln x} + \sin(\cos x)$ Uračte $f'(x)$ ~~na~~ kde existuje.

Bez def. oboru f a f'.

$f'(x) = [e^{\ln(\cos x) \ln x}]' + \cos(\cos x) (-\sin x) =$

$= \left(\begin{array}{l} \nabla \nabla \\ \circ \circ \end{array} \right) (\cos x)^{\ln x} \neq \ln x \cos x^{\ln x - 1}$ *šepič*

žalov $(e^x)' \neq x e^{x-1}$

$= \underbrace{e^{\ln(\cos x) \ln x}}_{\cos x^{\ln x}!} (\ln(\cos x) \ln x)' - \cos(\cos x) \sin x =$

$= \cos x^{\ln x} \left[\underbrace{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}_{f'} \ln x + \underbrace{\ln(\cos x)}_f \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \right] - \sin x \cos(\cos x) =$

$= (\cos x)^{\ln x - 1} \frac{-x \sin x \ln x + \cos x \ln(\cos x)}{x} - \sin x \cos(\cos x).$

3. Uračte zvezorecku pro der. inv. fce. derivaci $f(x) = \sqrt{x}$ a def. obor f' , tj. kde všude der. existuje.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, pokud $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Z čehada?

Zderivujeme: $f^{-1}(f(x)) = x$ /

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\sqrt{x^2} = x, x \geq 0$$

Počítáme: Γ je interval $x \mapsto x^2$ s derivací $x \mapsto 2x$.

$\sqrt{x}' = \frac{1}{2x(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Odpovídá $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Zjevně stačí $x \geq 0$ a $(x \mapsto x^2)' \neq 0 \iff 2x \neq 0 \iff x \neq 0$

Tj. $x > 0$. Vnule limita, myslíte zprava, uvažujte jako reálné číslo, tj. vlastně.

opět: $f'(g(x))g'(x) = (f \circ g)'(x)$

4. Svižně $(\ln x)'$: $\underbrace{\ln}_{f}(\underbrace{e^x}_{g}) = x \implies \ln'(e^x)(e^x)' = 1 \implies \ln'(e^x) = \frac{1}{e^x} \implies \ln'(y) = \frac{1}{y}$

Pak $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Pišete však $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, zde $y = e^x > 0$, tj.

také $x > 0$.

4! Arcsin T.

5. Derivace exist. ma. $\neq D(f)$

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}, x \in \mathbb{R}; e^{-x^2} \leq 1 \text{ ok}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})^{-\frac{1}{2}} (e^{-x^2})' (-2x) = \frac{-x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}, x \neq 0.$$

$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 1}{h}$
Zdef. $= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$
a) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - e^{-h^2}}{h^2}} = 1$
b) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1 - e^{-h^2}}{(-h^2)}} = \dots = -1$
providle

! zůstane stažší $f(x) = \sqrt{x^2}$ a $f(x) = \sqrt{x^4}$ či $\sqrt{x^3} \rightarrow \exists f'$



6. $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$, DER zprava ex. na velštinu. $\cos 2x \leq 1$, OK. $Df = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} (-1)(-\sin 2x) 2 = \sin 2x (1 - \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}$$

Nyní $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Zkusme aspoň derivaci v $x = 0$ zprava či zleva

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 \sqrt{\frac{1 - \cos 2h}{(2h)^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2}} \quad / \quad b) \lim_{h \rightarrow 0^-} -2 \sqrt{\frac{1 - \cos 2h}{(2h)^2}} = -2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} |\sin x| \cos x$, kde $\operatorname{sgn} 0$ "nyní" NEDEFINOVÁ!

7. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Určete $f'(x)$ a Df . DŮ odevdat

za 14 dní.

Kap. Primitivní funkce

• K hledáme F , že $F' = f$.

• Pr.: pro $f(x) = x$... $F = x^2$? $F' = 2x$ ne (skoro)
 $F = \frac{1}{2}x^2$ $F' = \frac{1}{2}2x = x$; ano!

• Nyní: $\frac{1}{2}x^2 + 5$... Pišeme $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{R}$.

Metody: 1. Tabulka (dihos derivováním a tabulka pro der...)

2. Per-partes

$$\int cf = c \int f$$

3. Parciální zlomky

4. Substituce

Leibnizův vzorec : $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow \int f'g = fg - \int fg'$ (5)

NEBO $\int fg' = fg - \int f'g$ (mírni, užitečnější, ale jednodušší).

Pr.: $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\cos x} dx = x \sin x - \int \underset{f'}{1} \underset{g}{\sin x} dx = x \sin x + \cos x + C$
 $f' = 1 \quad g = \sin x$

Pr.: $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x +$
 $\underset{f}{x^2} \underset{g'}{\sin x} \quad g = -\cos x \quad \left| \quad \underset{f}{2x} \underset{g'}{\cos x} \quad g = \sin x \right.$
 $f' = 2x$
 $= -x^2 \cos x + 2 [x \sin x - \int \sin x] = -x^2 \cos x + 2x \sin x +$
 $+ 2 \cos x + C.$

Kontrola: derivace! $(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' =$
 $= -2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x =$
 $= \underline{x^2 \sin x}$

Sami spočítejte: $\int x e^{-x} dx.$

Integrace (Lepe otočit a zkusit logaritmus, pak až)

Pr.: $\int \operatorname{arctg} x dx = \int 1 \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$
 $\underset{g'}{1} \underset{f}{\operatorname{arctg} x} \quad f' = \frac{1}{1+x^2}$
 $g = x, \text{ ale } f' \text{ snadné!}$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int [\ln(1+x^2)]' dx =$

$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C$ \leftarrow toto se naučíte
 pořadí automaticky
 $\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C$
 $\Rightarrow F' = f = g' \Rightarrow F = g + C$
 SWADNE: $\int e^{f'} \cdot f' dx = e^f + C$

Pr.: $\int \sin^3 x dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_f \underbrace{\sin^2 x}_{g'} dx = \left| \begin{array}{l} f' = 2 \sin x \cos x \\ g = -\cos x \end{array} \right|$ (6)

$$= -\sin^2 x \cos x + \int 2 \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\cos^2 x}_g dx$$

a) $-\sin^2 x \cos x + 2 \left[-\cos^3 x - \int \cos x \cdot 2 \cos x \sin x dx \right]$

Člennem porovnáním: $\int \sin x \cos^2 x = -\cos^3 x - 2 \int \cos^2 x \sin x dx + C$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos^2 x = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{C}{3}, \text{ může stále psát } C.$$

Tj. $\int \sin^3 x dx = -\sin^2 x \cos x - 2 \cos^3 x + \frac{2 \cos^3 x}{3} + C = -\sin^2 x \cos x + \frac{4}{3} \cos^3 x + C$

b) uďo : $-\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x (1 - \sin^2 x) dx =$

$$= -\sin^2 x \cos x + 2 \int \sin x dx - 2 \int \sin^3 x dx.$$

Porovnáním : $3 \int \sin^3 x = -\sin^2 x \cos x + 2 \cos x \Rightarrow$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C$$

Pr.: Spočítejte $\int \ln x dx$ per partes rozložením (vraťme se zpět)

$\int \underbrace{1}_f \underbrace{\ln x}_{g'} dx = 1 \int \ln x dx - \int [0 \ln x] dx \rightarrow \text{nic.}$

$\int \underbrace{1}_{g'} \underbrace{\ln x}_f dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$

$g' \neq$ sice $g = x$ je „složitější“ než 1, ale f' „extrémně“ jednoduché.

Pr.: $\int \cos^4 x dx$ DÚ za 14 dnů (2. příklad).

Rozklad na parci'alni' zlomky

deg R < deg T:
$$\frac{R(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^M \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{A_i^\ell}{(x-a_i)^\ell} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} \frac{B_j^k + C_j^k}{(x^2+p_jx+q)^k}$$

↑
reálná a_i
↑
kořeny $\notin \mathbb{R}$

NEBO

$$\sum_{i=1}^p \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{\vec{A}_i^\ell}{(x-a_i)^\ell}$$

$a_i \in \mathbb{C}$ (jednotlivě \forall kořeny)
 $\sum_{i=1}^p m_i = t$ pak sečtu na "v. výraz"

Nejdův. /zopakuji me
procvičme dělení:
viz minule

Pr.: $\frac{5x-4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ / a) / (x+1) / b) / x-2

a) $\frac{5x-4}{x-2} = A + B \frac{x+1}{x-2}$ / x := -1

$-\frac{9}{-3} = 3 = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 3$

b) $\frac{5x-4}{x+1} = \frac{A(x-2)}{x+1} + B$ / x := 2

$\frac{6}{3} = 2 = B$

c) "Rychle" $\frac{5 \cdot (-1) - 4}{-3} = 3 = A$ | $\frac{5 \cdot (2) - 4}{2+1} = \frac{6}{3} = 2 = B$

Počítám-li (kaef.) m x+1, zakryvám x+1 ulico a dostanuji korien x+1. Počítám-li kaef. m x-2, zakryvám x-2 ulico a dostanuji 2.

pisumenka "nelkovespondieji" svetom 0 rozdel. : mnoho tudat

Pr.: $\frac{5x-4}{(x^2-x-2)(x+1)} = \frac{5x-4}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$

Začun s B! Jinak obtíž. ukážeme. nebo s C

1. Napr. s C (zakryvám): $\frac{5 \cdot 2 - 4}{3^2} = C = \frac{2}{3}$ ✓

2. Ted' bych mel postupovat od B k A.

Zkusme spatni naopak: Zakryvám ~ udsobeni k dostanu: Vyudsobim x+1: $\frac{5x-4}{(x+1)(x-2)} = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

Nelre doadit (x=-1). Vyudsobim $\frac{(x+1)^2}{x-2}$

$\frac{5x-4}{x-2} = A(x+1) + B + \frac{C(x+1)^2}{x-2}$. Lze, ale

nedostanu A. Dostanu B. Začneme ted' od B (znovu, byt' i upu B bychom upocetli).

Zakryvám: $B = \frac{5 \cdot (-1) - 4}{-3} = \underline{\underline{3}}$. Mám! Ale A (9)

Stále obhřívá. Vynásobím-li $(x+1)^2$ a dosadím $x = -1$,
opět $A \cdot 0 = \dots$. Musím odečíst.

$$\frac{5x-4}{(x+1)^2(x-2)} - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{5x-4-3(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{2x+2}{(x+1)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x-2)}$$

Vykrácením zčaroven kontrola správnosti odečítání. (Více intence: teorie komplexních ta!)
~ 4. sem.

$$\frac{2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \dots \Rightarrow A = \frac{2}{-1-2} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

Př.: $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$. Rozložte na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

1. C : $\frac{-2}{(-2-1)^2} = \frac{-2}{9}$

2. B! : $B = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

3. A : $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1/3}{(x-1)^2} = \frac{x - 1/3(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{(x-1)^2(x+2)}$

$= \frac{2/3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{C (= -\frac{2}{9})}{x+2}$ (Lze násobit... a hlavně něco ziskat!)

vykrácením!

$$\frac{2/3}{1+2} = \frac{2}{9} = A$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+2}$$

Pr.: Stejný princip, ale "trapezoid" komplexní čísla.
 (komplex. čísla jsou "fun", Freude ...)

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ (číslo číslo $\frac{1}{(x-z_i)^2}$ i kvadratické).

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{(x+i)^2} + \frac{D}{x-i} + \frac{E}{(x-i)^2}$$

$x^2+1=0$
 $x = \pm i$
 (1. hodina)

• $A = \frac{1}{1^2} = 1 \checkmark$

• $C = \frac{1}{-i(-i-i)^2} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$ \Rightarrow $E = \frac{i}{4} = \frac{i}{4}$

\rightarrow B, D odečteme! D nutněba, neb (teorie) $D = \bar{B}$.

• $\frac{1}{x(x^2+1)^2} - \frac{i/4}{(x+i)^2} = \frac{1 + i/4 x(x-i)^2}{x(x^2+1)^2} =$

$= \frac{1 + \frac{i}{4} x(x^2 - 2ix - 1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{\frac{i}{4} x^3 + \frac{4}{2} x^2 - \frac{i}{4} x + 1}{x(x^2+1)^2} =$

$= \frac{i x^3 + 2x^2 - i x + 4}{4x(x^2+1)^2} = \frac{i x^2 + 3x - 4i}{4x(x-i)^2(x+i)} = \frac{B}{x+i} + \frac{D}{x-i} + \dots$

$(i x^3 + 2x^2 - i x + 4) : (x+i) = i x^2 + 3x - 4i - 4i$
 $-(i x^3 - x^2)$
 $\hline 3x^2 - i x + 4$
 $-(3x^2 + 3ix)$
 $\hline -4ix + 4$
 $-(-4ix + 4)$
 $\hline 0$

$$B = \frac{i(-1)^2 - 3i - 4i}{4(-i)(-i-i)^2} = \frac{-i - 3i - 4i}{-4i \cdot 4(-1)} = \frac{-8i}{16i} = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow kon'el $D = \bar{B} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{A}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+i} + \frac{-\frac{2}{4}}{(x+i)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+i)^2}$$

Integrovaní paré zlomkú ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; j'nal svedúe).

$l > 1$: $\frac{A}{(x-z)^l} + \frac{\bar{A}}{(x-\bar{z})^l}$; $\int \frac{A dx}{(x-z)^l} + \int \frac{\bar{A} dx}{(x-\bar{z})^l} = \frac{A(x-z)^{-l+1}}{-l+1} + \frac{\bar{A}(x-\bar{z})^{-l+1}}{-l+1}$

$$= \frac{1}{1-l} \left[\frac{A(x-\bar{z})^{l-1} + \bar{A}(x-z)^{l-1}}{\underbrace{[(x-z)(x-\bar{z})]^{l+1}}_{\text{realúe}}} \right]$$

Čitateľ také: $u + \bar{u}$ je realúe $\rightarrow (u = A(x-\bar{z})^{l-1})$

Ovériť zderivovániím ...

$l=1$: $\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}$; $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int [\ln(x^2+1)]' dx$

$$= \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{dx}{x-i} + \int \frac{dx}{x+i} = \ln|x-i| + \ln|x+i| = \ln|(x-i)(x+i)| + C$$

$$= \ln(x^2+1) + C$$

Opet: Pro obecna' z (nejen i, z) musím doka'zat

obech v'zorec zderivovániím.