! **Příklad** (a trochu teorie reprezentací): $G = C_n = \{e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k = 0, \dots, n-1\}$ buď cyklická grupa. Diskrétní Hausdorffova (top. zděděná z $\mathbb{C}$), tj. lok. kompaktní.

Počítací míra je Haarova (levá i pravá).

C_n je abelovská $\Rightarrow (\widehat{C_n})_{k.d}$ sestává jen z jednorozměrných reprezentací.

Opakování $\mathbb{C}[G] := \{f : G \to \mathbb{C} \mid \mathrm{supp}(f) < \infty\}$ grupová algebra *)

$\mathbb{C}[G] \cong \langle \{\delta_g, g \in G\} \rangle$ jako $\mathbb{C}$-vekt. prostory, kde

$\delta_g(h) = \begin{cases} 0 & g \neq h \\ 1 & g = h \end{cases} \in \mathbb{C}[G]$ báze: i) $f = \sum_{g \in G} f(g) \delta_g$ suma je kon.

ii) $\sum_{\substack{g \in G \\ \text{konečná } \Sigma}} \lambda_g \delta_g = 0 / h \Rightarrow \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g(h) = 0 \Rightarrow \lambda_h = 0 \; \forall h$

$\mathrm{Conj}(G) := \{C \subseteq G \mid C \text{ je konjugační třída v } G\}$

$\mathrm{Conj}(C_n) \cong C_n$, neboť C_n je abelovská.

- $(\widehat{C_n})_{k.d} \cong \mathrm{Conj}(C_n)$ izomorfizmus v kategorii množin (Set). Platí pro G konečnou: $(\widehat{G})_{k.d} \cong \mathrm{Conj}(G)$.
- $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{[\varphi, V] \in \widehat{G}} (\dim V) V$ (Další zobecnění je Peter–Weylův teorém pro $L^2(G)$, kde G je kompaktní.)

Pro G konečnou.

Vlevo uvažujeme $(g \cdot f)(h) := f(g^{-1} h)$ tzv. pravou $(R_g f)(h)$

regulární reprezentaci.

---

*) Násobení je konvoluce: $(f * g)(x) := \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1} x)$ | $(fg)(x) = f(x) g(x)$ je „alternativní" nás. v $\mathbb{C}[G]$

Všimněme si, že v případě (cvič) konečných abelovských $\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\hat{G}} (\dim V)V$ & věta o reprezentaci abelovských poskytne, že $\hat{G}_{k.d} \simeq G \ (\simeq \mathrm{Conj}(G))$. Definujme

$$\chi_m(g)v := g^m v \quad \forall v \in \mathbb{C},\ \forall g \in C_n,\ m = 0, \dots, n-1$$

Ired. k dim $\mathbb{C}$, $\chi_{m_1} \not\cong \chi_{m_2}$ $\forall m_1 \neq m_2$. Dk: $e^{\frac{2\pi i k m_1}{n}} \overset{↯}{=} e^{\frac{2\pi i k m_2}{n}}$ $\quad \frac{km_2}{n} - \frac{km_1}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{n}(m_1 - m_2) \in \mathbb{Z}$ $\forall k$

spec $k=1$ $\quad n \mid m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 \equiv m_1 \mod n$ ↯

$\hat{C}_{n\,k.d} \cong \{\chi_m \mid m = 0, \dots, n-1\}$ izom. v Set (bijekce)

$$(\mathcal{F}f)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right) e^{-\frac{2\pi i k m}{n}} \quad \forall f \in \mathbb{C}[G] \cong L^1(G)$$

$$(\mathcal{F}\delta_h)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_h\left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right) e^{-\frac{2\pi i k}{n} m} =$$

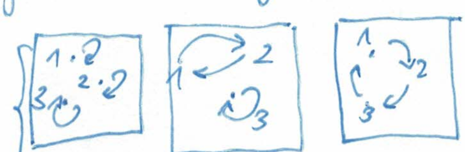
$h = e^{\frac{2\pi i l}{n}}$

$$= e^{-\frac{2\pi i l}{n} m} = \left(e^{-\frac{2\pi i l}{n}}\right)^m$$

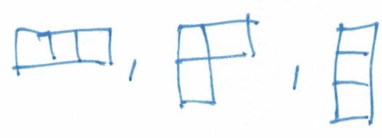
Vzorečky známe z tzv. „diskrétní Fourierovy transformace" (DFT). Jsou to důsl. definice F.t. pro G lok. komp. v případě $G = C_n$.

Příklad: Four. transf. bývá zvykem definovat jen na G lok. komp. a abelovských. U nás je definice obecnější.

$G = S_3$

$\mathrm{Conj}(S_3) \cong \Big\{$ 

$\Big\} \cong$

$\cong \Big\{$  $\Big\} \cong \left\{ \begin{matrix} 3 = 3 \\ 3 = 2+1 \\ 3 = 1+1+1 \end{matrix} \right\} \cong \mathrm{Par}(3)$

Teorie repr.: $(\hat{S}_3)_{k.d.} \overset{\text{cvič}}{\cong} \mathrm{Conj}(S_3) \to 3$ neekv. ir. rep.

$\dim \mathbb{C}[S_3] = \# S_3 = 6$

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus (\dim V) V \quad \Big| \quad 6 = \sum_{i=1}^{3} (\dim V_i)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 \\ 6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ 6 = 3^2 \ \lightning \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dim V_1 = 1 \\ \dim V_2 = 1 \\ \dim V_3 = 2 \end{array}$$

$\uparrow$ tudíme

$\chi_1(g) := \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \quad \forall g$

$\chi_2(g) v := \mathrm{sgn}(g) v \quad , v \in \mathbb{C}$. Je repr., neb sgn je homom.

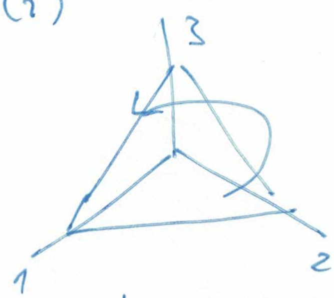
Zbývá nalézt 2rozměrnou

$$V_3 := \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 0 , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ báze $\mathbb{C}^3$.

$$\rho_3(g) v := \sum_{i=1}^{3} x_i e_{g^{-1}(i)}$$

Ireducibilita: jen z obr.



Míra na S_3 opět počítací.

$$(\mathcal{F}f)(\chi_1) = \sum_{g \in S_3} f(g)$$

$$(\mathcal{F}f)(\chi_2) = \sum_{g \in S_3} \mathrm{sgn}\, g \, f(g)$$

Pozn. (1) a (2) souvisí s Weylovými projektory na $\bigotimes^3 \mathbb{C}^n$ (viz Goodman, Wallach: ... Classical Groups ...) 2 verze

$\Big\{ (\mathcal{F}\delta_h)(\rho_3) = \sum_{g \in S_3} \delta_h(g) [\rho_3(g)]^*$ takovouhle již def. nemáme, neb ρ_3 není charakter $\Big\}$

<u>Definice</u>: $(A, \|\cdot\|)$ nazvu <u>Banachovou algebrou</u>, pokud A je algebra nad $\mathbb{C}$ (asociat.) a $\|\cdot\|: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ je norma splňující $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ $\forall a, b \in A$ (submultiplikativnost) a taková, že $(A, \|\cdot\|)$ je úplný normovaný prostor.

<u>Tvrzení</u>: Buď $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra. Pak $\cdot : A \times A \to A$ je spojité.

Dk.: $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, $(a_n)_n, (b_n)_n$ sítě.

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab\| \leq \|a_n (b_n - b)\|$$
$$+ \|(a_n - a) b\| \xrightarrow[n]{} \|a\| \cdot 0 + 0 \|b\| = 0.$$

Př.: 1. těleso $\mathbb{C}$ s valuací, např. absolutní hodnotou, $|\,|$ dokonce multipl.

2. $Mat(n, \mathbb{C})$ $\quad \|a\| := \sum_{i,j} |a_{ij}|$

$$\|ab\| = \|\sum_j a_{ij} b_{jk}\| \leq \sum_j \|a_{ij} b_{jk}\| = \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij} b_{jk}|$$
$$\|a\| \|b\| = \sum_{i,j} |a_{ij}| \sum_{k,l} |b_{kl}| \geq \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij}| |b_{jk}| = \|ab\|$$

3. V Banachův $\quad B(V) := \{T : V \to V \mid T \text{ lin. spojité}\}$, $|\cdot|$ norma na V

$$\|A\| = \sup_{|v| \leq 1} |Av| = \sup_{|v| = 1} |Av| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}.$$

Spojité $\Rightarrow$ omezené, $\|\,\|$ dobře definovaná

úplný

3.1. Dále $K(V)$ kompaktní op. na V

3.2. $F(V)$ Fredholmovy op. na V

4. X lok. kompaktní <u>Hausdorffův</u> top. prostor $\mathcal{C}_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ spojitá a } f \text{ mizí v nekonečnu}\}$. f mizí v nekonečnu, pokud

existuje C kompaktní v X, že $f|_{X \setminus C} = 0$, tj. s komp. nosičem 2

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, kde $|\ |$ je abs. hodnota v $\mathbb{C}$. Supremum existuje dle věty o nabývání maxima na kompaktní množině.

Pozn.: V tomto případě uvažujeme $C_0(X)$ s bodovým násobením.

! 5. G lok. komp. $(L^1(G), *, \|\cdot\|)$ $\|f\| = \int |f| \, d\mu_G$ μ_G levá Haarova.

Definice: A Banachova algebra. Definujme $\Delta_A := \{m : A \to \mathbb{C} \mid$ m homomorf. algeber a $m \neq 0\}$. Δ_A sluje strukturním prostorem A a její prvky stavy.

(Nejsou to stavy ze C^*-algeber.)

Př.: 1. $A = C_0(X)$, X lok. kompaktní

$\forall x \in X$ $m_x : A \to \mathbb{C}$ $m_x(f) := f(x)$

$m_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = m_x(f)\, m_x(g)$ homom. alg.

Definice: $\forall m, n \in \Delta_A$ $(m \cdot n)(a) = m(a)\, n(a)$ a přirozeně
$(m+n)(a) = m(a) + n(a)$

Pozn.: $m, -m \in \Delta_A$ avšak $m + (-m) = 0 \notin \Delta_A$. Není ani vekt. prostor.

Základní konstrukce – augmentace

Banach. alg. A nemusí nutně obsahovat jednotku, tj. element $1 \in A$, $1x = x1 = x$ $\forall x \in A$.

Př.: X lok. komp. nekomp. $C_0(X) \not\ni 1$

Augmentace algebry: $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$

$$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$$
$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$

$\|(a,\alpha)\|^{\sim} = \|a\| + |\alpha| \qquad \forall a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$1 := (\underset{A}{0}, \underset{\mathbb{C}}{1})$

Souvisí s Alexandrovovou kompaktifikací $X \hookrightarrow X^\infty = X \cup \{\infty\}$
top. na X^∞
viz Deitm.-Echt.

$$\mathcal{C}_0(X^\infty) = \mathcal{C}_0(X)^\sim$$

__Pozn.:__ $\forall m \in \Delta_A \quad V(m) := \{x \in A \mid m(x) = 0\} \subseteq A$ uzavřená

a kodimenze 1: i) $x_n \to x \in A,\ x_n \in V(m)\ \forall n$

$0 = \lim_n m(x_n) = m(\lim_n x_n) = m(x) \Rightarrow$

$x \in V(m)$

ii) $m: A \to \mathbb{C}$

$\overline{\operatorname{Ker} m \oplus \operatorname{Im} m'} \simeq A$

$m \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} m' \cong \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Ker} m$ má kodimenzi 1

$\Downarrow$

$\overline{\operatorname{Im} m'} = \operatorname{Im} m' \nearrow$

$x, y \in V(m):$ $\left.\begin{array}{l} m(xy) = m(x)m(y) = 0 \\ m(x+y) = 0 \\ m(\lambda x) = \lambda m(x) = 0 \end{array}\right\}$ $V(m)$ je ideál.

$V(m)$ je uz. ideál a maximální $\Rightarrow$ analogie s ideálem $V(I)$ v algebraické topologii:

$I(X) = \{p \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid p(a) = 0\ \forall a \in X\}$
Verschwindungsid.

$\left(X := \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in S\ p(a) = 0\},\ S \subseteq \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n] \right)$
varieta

$I \subseteq \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$

$V(I) = \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in I\ p(a) = 0\}$
varieta

Definice: Pokud A má jednotku, nazveme ji *unitální*.
Množinou inv. ertibilních prvků v algebře A rozumíme $A^\times = \{ u \in A \mid \exists u' \in A ,\ u'u = uu' = 1 \}$.

Lemma (o Neumannově řadě): Pokud $(A, \|\ \|)$ je unitální Banachova algebra, $a \in A$ a $\|a\| < 1$. Pak

1) $1 - a \in A^\times \wedge (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$
2) $A^\times \subseteq A$ je otevřená

Dk.: • $s_n := \sum_{m=0}^{n} a^m$ $\qquad \|s_{n+p} - s_n\| = \|\sum_{k=0}^{n+p} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k\| =$

$$= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} a^k\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|a\|^k \le \|a\|^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \|a\|^k$$

$$= \|a\|^{n+1} \frac{1}{1-\|a\|} < \varepsilon \quad (*)$$

$\|a\|^{n+1} < \varepsilon(1-\|a\|)$

$(n+1)\ln\|a\| < \ln(1-\|a\|)\varepsilon$

$n+1 > \frac{\ln \varepsilon(1-\|a\|)}{\ln\|a\|}$ $(\ln\|a\| < 0)$

$n_0 := \max\{0, \frac{\ln[\varepsilon(1-\|a\|)]}{\ln\|a\|} - 1\}$

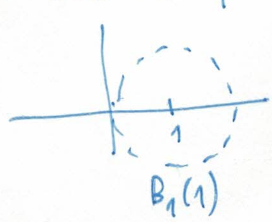
$\forall n \ge n_0\ \forall p$ mám odhad $(*)$

Je tedy $(s_n)_n$ cauchyovská. Z úplnosti A je $(s_n)_n$ konvergentní: $s := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.

• $(1-a)s = (1-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} = 1$

Tj. $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$

• Otevřenost $A^\times$. $x \in A^\times$, $B_1(1) = \{ z \in A \mid \|z - 1\| < 1 \}$



obr.

Zkoumejme $x B_1(1)$.

- $B_1(1)$ je otevřená
- $x\cdot : A \to A$ je bijekce, $x\cdot$ je spojité (viz násobení je „bi"spojité). Open map thm.: $x\cdot$ je homeom.
  Tj. $\underline{x B_1(1)}$ je otevřená.
- $x \in x B_1(1) \Leftarrow 1 \in B_1(1)$, tj. $x B_1(1)$ je okolí x
- Invertibilnost $xz \in x B_1(1)$, $z \in B_1(1)$
  $z \in B_1(1)$ $a = 1 - z$, $\|a\| < 1 \Rightarrow$ ~~tj.~~ má inv. dle bodu výše. Vezmi $z^{-1}x^{-1}$, jež je inv. k xz.

  Tj. $x \in \underline{x B_1(1)}$ ot. okolí x, podmna $A^\times$. $\square$

<u>Pozn.:</u> $\underline{A^\times \text{ je topologická grupa}}$: Násobení spojité (víme).
Inverze na $A^\times$. $a \mapsto \sum_0^{+\infty} a^n = (1-a)^{-1} : B_1(0) \to A$ spoj.
$-1 : B_1(1) \to A$ spoj.

Totéž na $\forall x \in A^\times$ ~~x~~$B_1(1)$, tj. spoj. na $A^\times$.
Hausd. z hausd. A.

<u>Definice:</u> • Pro $a \in A$: $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda 1 \text{ nemá inv. prvek v } A\}$
<u>Spektrum</u> <u>a</u> v unitální A. Není-li A unitální, $\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$ (v augmentaci $\tilde{A} \supseteq A$).
<u>$Res_A(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$</u>

<u>Pozn.:</u> Koncept holomorfnosti: $f : D \subseteq \mathbb{C} \to V$ (normovaný (hyp. Banach.)) holomorfní $\forall z \in D$
$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$ otevřená. $\left(\frac{1}{h} \in \mathbb{C}\right)$

<u>Lemma:</u> A unitální <u>Banachova</u>. Pak $\forall a \in A$ $\sigma_A(a)$ je uzavřená podmna $\overline{B_{\|a\|}(0)} \subseteq \mathbb{C}$. Speciálně $\sigma_A(a)$ je kpt.

Dk.: 1) $A^\times \subseteq A$ ot. $\lambda \mapsto a - \lambda 1$ spoj. $\Rightarrow Res_A(a)$ je otevřená a tedy $\sigma_A(a)$ uzavř.

2) Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| > \|a\|$. $a - \lambda 1$ má inverzi, neboť

$\|\lambda^{-1} a\| < 1 \underset{\text{Lemma (Neumann. řada)}}{\Longrightarrow} 1 - \lambda^{-1} a$ je invertibilní.

$\lambda 1 - a = \lambda(1 - \lambda^{-1} a)$ také, neboť $\lambda \neq 0$. Tj. $\lambda \in Res_A(a) \Leftarrow$
$\Leftarrow |\lambda| > \|a\|$. Spektrum je kompaktní.

Věta: A buď unitální Banachova algebra a $a \in A$. Pak $\boxed{\sigma_A(a) \neq \emptyset.}$

Dk.: Ať $\exists a$ $\sigma_A(a) = \emptyset$, $\alpha : A \to \mathbb{C}$ spojitý funkcionál. $f_\alpha(\lambda) = \alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)$ je holo ($\frac{1}{a-\lambda}$ je holo na $\mathbb{C}$, spoj. lin. $\circ$ hol. funkce je holo)

Buď $|\lambda| > 2\|a\|$

$$|f_\alpha(\lambda)| = \left|\alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\left[\alpha\left(\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\left|\alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right)\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{0}^{+\infty}\left|\alpha\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right| \leq \quad \leftarrow \alpha \text{ spoj.}$$

$$\leq \frac{C}{|\lambda|}\sum \|\lambda^{-1} a\|^n \leq \frac{C}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2C}{|\lambda|}.$$

Liouville $f_\alpha(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\forall \alpha \in A'$ $\leftarrow$ spoj. duál

$\Rightarrow \frac{1}{a-\lambda} = 0$ (Hahn–Banach – dost prvků A'). $\square$ (A' … duál)

Pozn.: Z lemmatu plyne: $\forall m \in \Delta_A$ je spojitý.

Dk.: Jen pro A unitální: $m(1) = m(1 \cdot 1) = m(1)^2 \Rightarrow$

a) $m(1) = 0 \Rightarrow m(a) = m(1a) = 0$

$m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0$ $\forall a \in \Delta_A$

b) $m(1) = 1$: Ať b inv., pak $\Rightarrow a - m(a)1 \in A \setminus A^\times$:

$1 = m(1) = m((a - m(a)1)b) = m(a - m(a)1)\, m(b) = 0 \cdot m(b) = 0$ ↯

$\Rightarrow m(a) \in \sigma_A \Rightarrow m(a) \subset B_{\|a\|}(0)$. Odtud $\|m\|_{op} \leq \frac{|m(a)|}{\|a\|} \leq 1$. $\square$

Důsledek (Gelfand–Mazur): Nechť A je unitální Banachova algebra, že $\forall$ nenulový jsou invertibilní. Pak $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

Dk.: $↯$ $a \in A \setminus \mathbb{C}1$: $a - \lambda 1 \neq 0 \Rightarrow a - \lambda 1$ je invertibilní
$\lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sigma_A(a) = \emptyset$ $↯$.

Def.: $\forall a \in A$ unitální Banachově def. spektrální poloměr

$$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

Věta (o spektr. poloměru): $r(a) = \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ a $r(a) \leq \|a\|$.

Dk.: 1. Dokážeme $r(a) \overset{\bullet}{\leq} \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{\bullet\bullet}{\leq} r(a)$

Buď $\lambda \in \sigma_A(a)$ • $\lambda^n - a^n = \underbrace{(\lambda - a)}_{\text{není inv.}} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a^{n-1-j} \Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(a^n)$

[a není inv. $\Rightarrow ab$ není inv.: $↯$ $\exists z \in A$ $abz = 1 \Rightarrow bz$ inv. kc]

Tedy: $|\lambda^n| \leq \|a^n\| \Rightarrow |\lambda|^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ (•) ✓

•• $(\lambda 1 - a)^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_0^{+\infty} a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ $\forall |\lambda| > \|a\|$

$(\lambda 1 - a)^{-1}$ holom na $\underline{|\lambda| > \|a\|} \Rightarrow \sum a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ konverguje

$(v\ A) \Rightarrow a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ $\underline{\text{omezená}} \Rightarrow \|a^n\| \leq C|\lambda|^{n+1}$ $\forall n$

$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \underset{\to 1}{C^{\frac{1}{n}}} |\lambda| \underset{\to 1}{|\lambda|^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow |\lambda| \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r(a) \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

2. $r(a) = \text{l.s.} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{\text{submult. } A}{\overset{\text{l.s.}}{\leq}} (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|$. $\square$

Př.: Nechť G je lok. komp., μ_G l. Haarova míra, $\forall \chi \in \hat{G}$. Uvažme $m_\chi(f) := \hat{f}(\chi)$ $\forall f \in L^1(G)$. Chceme $m_\chi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ je stav.

$m_\chi(f * g) = \widehat{f*g}(\chi) = \hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi) = m_\chi(f)\, m_\chi(g)$

$m_\chi(f+g)$, $m_\chi(cf)$ snadné.

Spojitost: $f_n \to_n f$ v $L^1(G)$

Lebesgue monoton. konv.

$m_\chi(\lim_n f_n) = \int \lim_n f_n \bar{\chi}\, d\mu_G = \lim_n \hat{f}_n(\chi) =$

$\lim_n m_\chi(f_n)$. Tj. m_χ je spojité.

Nenulovost zřejmá: $f = \chi_U \chi$ (U otevř.).

char fce, charakter

Stav: $\hat{G}$ (Hausdorffova) topologická grupa. $\nabla F : L^1(G) \to Fce(\hat{G})$

Chceme dát topologii prostoru stavů: Vezměme normu na $\Delta_A \subseteq A'$, $\|\alpha\| = \sup_{\|v\|<1} \|\alpha(v)\|_A$. Píšeme jen $\| \; \|$ – rozlišíme z kontextu.

Lemma (normy stavů): Pokud A je Banachova alg. a $m \in \Delta_A$. Pak $\|m\| \leq 1$. Pokud navíc A je unitální, $\|m\| = 1$.

Dk.: 1. A je unitální. $m(1) = m(1^2) = m(1)m(1) \Rightarrow m(1) = 1$ nebo $m(1) = 0$. Pokud $m(1) = 0 \Rightarrow m(a) = m(a.1) = 0$ ↯

Pro $a \in A$: $m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0 \Rightarrow$ $a - m(a)1$ není invertib. [$zz^{-1} = 1 \Rightarrow m(z)m(z^{-1}) = 1 \Rightarrow m(z) \neq 0$]

$\Rightarrow m(a) \in \sigma_A(a) \subseteq \overline{B_{\|a\|}(0)} \Rightarrow |m(a)| \leq \|a\|$.

charakteristika spektra

$\Rightarrow \|m\| \leq 1$. Navíc $m(1) = 1 \Rightarrow \|m\| = 1$.

2. A není unitální $\Rightarrow$ $\tilde{m} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$, $\tilde{m}(a, \alpha) := m(a) + \alpha$. Opět nenulový a spojitý: $m(a) = \tilde{m}(a, \alpha) - \alpha$

$|m(a)| = |\tilde{m}(a, \mathbb{1})| \le \|a\| \Rightarrow \|m\| \le 1.$ $\square$

Def: $(V, |\cdot|)$ normovaný. Slabá $*$-topologie na V' ≡ iniciální pro $\{\delta_v : V' \to \mathbb{C},\ v \in V\}$, $\delta_v(\alpha) := \alpha(v)\ \forall \alpha \in V'$

$(\alpha_j)_j \subseteq V'$ konverguje k $\alpha \iff \alpha_j(v) = \alpha(v)\ \forall v \in V$

Banachova-Alaoglueova věta: $(V, \|\cdot\|)$ normovaný. Pak $\overline{B}' := \{f \in V' \mid \|f\| \le 1\} \subseteq V'$ se slabou $*$-topologií je kpt. Hausd.

Dk.: $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$. $f \in \overline{B}'$ $|f(v)| \le \|v\|\ \forall v \in V \Rightarrow f(v) \in \underbrace{\|v\|\,\overline{B}}_{\subseteq \mathbb{C}}$ (kompaktní). $\Xi : \overline{B}' \to X_{v \in V}(\|v\|\overline{B})$, $f \mapsto (f(v))_{v \in V}$, $f \in \overline{B}'$. X kpt. Hausdorffův (Tychonov).

Ξ je injektivní. Je $\Xi(\overline{B}')$ uzavřené? $(f_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f \iff$

$\forall v \in V: (f_\alpha)(v) \xrightarrow{\alpha} f(v)$ (konv. na X) $\iff f_\alpha \xrightarrow{\alpha} f$ ve slabé $*$-top.

$\|f\| = \sup_{v \in V,\ |v| \le 1} |f(v)| = \sup_{v \in V,\ |v| \le 1} |\lim_\alpha f_\alpha(v)| \le \sup 1 = 1 \Rightarrow$ uzavřenost.

Uzavř. v kpt. je kpt. $\square$

(spoj. vůči m!)

Def: Δ_A buď odteď vybaveno slabou $*$-topologií.

Definice (Gelfandovo zobrazení): $\forall a \in A$, $\hat{a} : \Delta_A \to \mathbb{C}$, $\hat{a}(m) := m(a)$ (Gelfandovo zobrazení) a $\hat{\ } : A \to F(\Delta_A)$, kde $\hat{\ }(a) := \hat{a} \in F(\Delta_A)$. Píšeme $\hat{a}$ (Gelfandova transformace). [$F(X)$:= prostor $\forall$ fcí na množině X, do $\mathbb{C}$.]

Věta (o Gelfandově zobrazení): Nechť A je Banachova algebra. Pak

1. Δ_A je lokálně kompaktní Hausdorffův
2. A je unitální $\Rightarrow$ Δ_A je kompaktní
3. $\forall a \in A$ $\hat{a} \in \mathcal{C}(\Delta_A)$ a mizí v nekonečnu.
   $\hat{\ } : A \to \mathcal{C}_0(\Delta_A)$ je homomorfismus algeber.
4. $\forall a \in A$ $\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}(\Delta_A)} \le \|a\|$, a tak $\hat{\ }$ je spojité!

Dk.: 1&2:

a) A unitální: $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow[n]{} f$, $f \in A'$ ($m_n : A \to \mathbb{C}$ homom. algeber). • $f(ab) = [\lim_n m_n](ab) = \lim_n [m_n(ab)]$

$= \lim_n [m_n(a)\, m_n(b)] = \lim_n [m_n(a)] \lim_n [m_n(b)] =$

$= (\lim_n m_n)(a) (\lim_n m_n)(b) = f(a) f(b)$

• analog. pro $\lambda a + \mu b$

• $f(1) = \lim_n m_n(1) = 1 \Rightarrow f \neq 0 \Rightarrow f \in \Delta_A$

Celkem $\overline{\Delta_A} = \Delta_A$. $\overline{\Delta_A}$ kpt. (Ban-Alaog.) $\Rightarrow \Delta_A$ kpt.

b) A není unitální: $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow[n]{} f$, $f \in A'$ stejně.

$\forall g \in \Delta_A$: $\tilde{g}(a + \lambda 1) := g(a) + \lambda$, $\tilde{g} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ augmentace. Linearita zřejmá.

$\tilde{g}((a + \lambda 1)(b + \mu 1)) = g(ab) + \lambda g(b) + \mu g(a) + \lambda\mu$

$\tilde{g}(a + \lambda 1)\, \tilde{g}(b + \mu 1) = g(a) g(b) + \lambda g(b) + \mu g(a) + \lambda \mu$,

tj. opět $\tilde{g}$ je homom. alg. / $\tilde{g} = 0 \Rightarrow g(0) = -\lambda \; \forall \lambda$ ↯

$\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1 \cdot 1) = \tilde{g}(1)^2 \Rightarrow \tilde{g}(1) = 0$ nebo $\tilde{g}(1) = 1$.

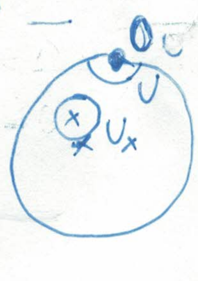
$m_n \xrightarrow[n]{} f \Rightarrow \tilde{m}_n \xrightarrow[n]{} \tilde{f}$. stejně $\tilde{f}$ nenul. homom. alg. A. $f(ab) = \tilde{f}(ab) = \tilde{f}(a) \tilde{f}(b) = f(a) f(b)$, tj. f homom. alg. také. Musíme připustit $f = 0$.

Pak ale $\overline{\Delta_A} \subseteq \Delta_A \cup \{0\}$ (□)

Celkem $\overline{\Delta_A}$ opět kpt. Odtud Δ_A lokálně komp.

(□)

U, U_x nechť oddělují 0 a x. Pokud 0 je v $\overline{\Delta_A}$.



$x \in \overline{\Delta_A} \setminus U$ kpt. $\subseteq \Delta_A$ okolí x

3. $\hat{a} \in \mathcal{F}ce(\Delta_A)$

$\hat{a}(m) = m(a)$ $\quad \lim_n [\hat{a}(m_n)] = \lim_n [m_n(a)] = (\lim_n m_n)(a) =$

$m_n \xrightarrow[n]{} m$ $\quad = m(a) = \hat{a}(m) = \hat{a}(\lim m_n) \Rightarrow \hat{a} \in \mathcal{C}(\Delta_A)$

Mizí:

$\widehat{ab}(m) = (ab)(m) = m(ab) = m(a)m(b) = \hat{a}(m)\hat{b}(m) =$

$= \hat{a}\hat{b}(m)$ ($\mathcal{C}_0(\Delta_A)$ s bodovým násobením)

4. $|\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}} = |m(a)|_{\mathbb{C}} \leq \|m\|_{\Delta_A} \|a\|_A \overset{\|m\| \leq 1 \text{ Lemma (normy stavů)}}{\leq} \|a\|_A \Rightarrow \|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta)} = \sup_{m \in \Delta_A} |\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}} \leq \|a\|_A$

$|\ |_{\mathbb{C}}$ označuje normu na $\mathbb{C}$ (valuaci)

$|\hat{\ }|_{op} = \sup_{\|a\| \leq 1} \|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} \leq \sup\{\|a\|_A\} \leq \sup\{1\} = 1.$

$\square$

<u>Pozn.:</u>

$\|m\|_{\Delta_A} = \sup_{\|a\| \leq 1} |m(a)|_{\mathbb{C}}, \ a \in \Delta_A$ [A']

$\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} := \sup_{m \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)} |\hat{a}(m)|_{\mathbb{C}}$ [$\mathcal{C}_0(X)$]

$\|a\|_A$ [A]

$|\ |_{\mathbb{C}}$ valuace, norma na $\mathbb{C}$ [$\mathbb{C}$]

$|T|_{op} := \sup_{\|a\|_V \leq 1} \|Ta\|_W \quad T: V \to W$ [$\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{C}}(V, W)$]