$\hat{G}_{k.d.} = \{\chi : G \to U(H) \mid \chi$ je ired. rep. na H. p. H konečnědimenz. a χ unitární$\}/\cong$

beru jako selektor (výběr reprezentací).

Již jsme ukázali, že $\hat{G}_{k.d.}$ je abelovská grupa.

Definice (Fourierova transf.): $\forall \chi \in \hat{G}_{k.d.}$ a $f \in L^1(G)$, kde G je lokálně kompaktní grupa definujeme $\hat{f}(\chi) = \int_G f(g)\overline{\chi(g)}\, d\mu$, funkci $\hat{f} = \mathcal{F}(f) : \hat{G} \to \mathbb{C}$.

Pozn.: 1. $\|f\chi\|_1 \leq \|f\|_1 \Rightarrow \hat{f}$ je dobře definovaná a $|\hat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1$.

2. Uvažujeme i G neabelovská.

3. $G = S^1$ $\quad \hat{f}(e^{2\pi i n \varphi})$ je Fourierův koeficient f

$G = \mathbb{Z}$ $\quad \hat{f}(e^{2\pi i n x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x) e^{2\pi i n x} \approx$ konvoluci s $\delta_{\mathbb{Z}}$ pro ty, kdo znají teorii distribucí (duály $\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \mathcal{D}, \ldots$).

Tvrzení: $f, g \in L^1(G)$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$ pro každou lok. komp. grupu a (levou) Haar.

Dk.: $\widehat{f * g}(\chi) = \int_G (f*g)(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu_x = \int_G\int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\mu_y\, \overline{\chi(x)}\, d\mu_x =$

Fubini

$= \int_G f(y) \int_G g(y^{-1}x)\overline{\chi(x)}\, d\mu_x\, d\mu_y = \int_{y \in G} f(y)\overline{\chi(y)}$

$\int_{x \in G} g(y^{-1}x)\overline{\chi(y^{-1})}\,\overline{\chi(x)}\, d\mu_x\, d\mu_y = \left| z = y^{-1}x \right| =$

$= \int_{y \in G} f(y)\overline{\chi(y)} \int_{z \in G} g(z)\overline{\chi(z)}\, dz = \hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi)$. $\square$

Pozn.: 1. $\overline{\chi}(y^{-1})\overline{\chi}(x) = \overline{\chi(y^{-1})}\,\overline{\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1})\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1}x)} = \overline{\chi}(y^{-1}x)$. Rovnost tak neovlivňuje možná neabelovskost grupy G.

Pozn. 2. Na abelovské grupě $\hat{G}_1$ lze zavést topologii, která učiní $\hat{G}_1$ lokálně kompaktní.

Def.: $\hat{G}_1$ buď vybaven kompaktně-otevřenou topologií, tj. zděděnou ($\subseteq$) z top. na $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$ generovanou $O(K,U) := \{\chi \in \mathcal{C}(K,U) \mid \chi(K) \subseteq U\}$, K kompaktní v G a U otevřená v $\mathbb{C}$. Toloje báze topologie na $\hat{G}$.

Věta: $\hat{G}_1$ je topologická grupa vůči kompaktně-otevřené topologii.

Dk.: Dokažme, že $\alpha(\chi,\eta) := \chi\eta^{-1}$ je spojité.

- $|\chi(x)\eta(x)^{-1} - \chi'(x)\eta'^{-1}(x)| \leq |\chi(x)\eta^{-1}(x) - \chi(x)\eta'^{-1}(x)| + |\chi(x)\eta'^{-1}(x) - \chi'(x)\eta'^{-1}(x)| = |\eta^{-1}(x) - \eta'^{-1}(x)| + |\chi(x) - \chi'(x)|$, $\forall x \in G$.
- $O_{K,\varepsilon}(\chi\eta^{-1}) = \{\gamma \in \hat{G} \mid \|\gamma - \chi\eta^{-1}\|_K < \varepsilon\}$, $\|\gamma\|_K = \sup_{x \in K} |\gamma|$.
- Je tedy zřejmé, že $O_{K,\frac{\varepsilon}{2}}(\chi) \times O_{K,\frac{\varepsilon}{2}}(\eta) \subseteq O_{K,\varepsilon}(\chi\eta^{-1})$, tj. $\alpha : (\chi,\eta) \mapsto \chi\eta^{-1}$ je spojité.
- Hausdorffovskost: $\chi,\eta \in \hat{G} \Rightarrow \chi(g) \neq \eta(g)$ $\exists g$

  $\chi(g) \in U_1$, $\eta(g) \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Hausd. $\mathbb{C}$)

  $\chi \in O(\{g\}, U_1) =: O_1$

  $\eta \in O(\{g\}, U_2) =: O_2$

  Zjevně $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$\square$