Rotace v $\mathbb{R}^3$

Úloha: otočit vektor v o úhel φ kolem (orientované) osy o.

Předpokládejme, že když palec pravé ruky ukazuje ve směru vektoru $\mathbf{o}$, tak otáčíme ve směru „prstů“ (pokud máme prostor orientován podle pravidla pravé ruky). Můžme předpokládat, že $\phi \in \langle 0, \pi \rangle$ (pro úhel větší jak π bychom použili orientovanou osu $-\mathbf{o}$).

Následují 3 různé návody na výpočet „otočeného“ vektora $R(\mathbf{v})$.

(a)

Nechť $\mathbf{o} = (o^1, o^2, o^3)^T$ je jednotkový vektor ve směru osy, t.j. $(o^1)^2 + (o^2)^2 + (o^3)^2 = 1$. Zobrazení je popsáno následujícím vzorcem:

$$R(\mathbf{v}) = (\mathbf{o} \cdot \mathbf{v})\mathbf{o} + \cos(\varphi)(\mathbf{v} - (\mathbf{o} \cdot \mathbf{v})\mathbf{o}) + \sin(\varphi)(\mathbf{o} \times \mathbf{v}), \tag{1}$$

kde $\cdot$ je skalární součin a $\times$ vektorový součin. Pokud by $\mathbf{v}$ nebyl jednotkový vektor, vzorec by byl

$$R(\mathbf{v}) := \frac{1}{|\mathbf{o}|^2}(\mathbf{o} \cdot \mathbf{v})\mathbf{o} + \cos(\varphi)(\mathbf{v} - \frac{1}{|\mathbf{o}|^2}(\mathbf{o} \cdot \mathbf{v})\mathbf{o}) + \sin(\varphi)\frac{1}{|\mathbf{o}|}(\mathbf{o} \times \mathbf{v}), \tag{2}$$

kde $|o|$ je velikost vektoru $\mathbf{o}$.

(b)

Pokud $\mathbf{o} = (o^1, o^2, o^3)^T$ je **jednotkový** vektor ve směru osy, pak otočení kolem osy $\mathbf{o}$ o úhel φ je lineární zobrazení reprezentováno maticí

$$\begin{pmatrix} (o^1)^2(1-c) + c & o^1o^2(1-c) - so^3 & o^1o^3(1-c) + so^2 \\ o^2o^1(1-c) + so^3 & (o^2)^2(1-c) + c & o^2o^3(1-c) - so^1 \\ o^3o^1(1-c) - so^2 & o^3o^2(1-c) + so^1 & (o^3)^2(1-c) + c \end{pmatrix}, \tag{3}$$

kde $c = \cos(\varphi)$ a $s = \sin(\varphi)$.

(c)

Ztotožněme vektory s čistě imaginárními kvaterniony

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \simeq iv^1 + jv^2 + kv^3. \tag{4}$$

Libovolný jednotkový kvaternion můžme pak psát jako $a + b\mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}$ je čistě imaginární kvaternion (nebo-li vektor) a $a^2 + b^2|\mathbf{w}|^2 = 1$. Nechť $\mathbf{o} = io^1 + jo^2 + ko^3$ je kvaternion odpovídající jednotkovému vektoru ve směru osy. Pak

$$h = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)\mathbf{o}$$

je jednotkový kvaternion a $h\mathbf{v}\bar{h}$ je čistě imaginární kvaternion odpovídající vektoru $R(\mathbf{v})$. Ve smyslu ztotožnění (4) můžme psát

$$R(\mathbf{v}) = h\mathbf{v}\bar{h} = (\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)\mathbf{o})\mathbf{v}(\cos(\varphi/2) - \sin(\varphi/2)\mathbf{o}). \tag{5}$$

Příklad

Otočte vektor $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$ kolem osy $(0,1,1)^T$ o $60°$!

Řešení podle (a):

Vektor $\mathbf{o} = (0,1,1)^T$ má velikost $|\mathbf{o}| = \sqrt{2}$, tedy $|\mathbf{o}|^2 = 2$. Skalární součin $\mathbf{o}\cdot\mathbf{v} = 1$, vektorový součin $\mathbf{o}\times\mathbf{v} = (1,1,-1)^T$, $\cos(60°) = 1/2$, $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. Dosazením do (2) dostaneme

$$R(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Řešení podle (b):

V matici (3) se předpokládá, že $(o^1, o^2, o^3)^T$ je jednotkový vektor ve směru osy. V našem případě tedy $(o^1, o^2, o^3)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$. Tedy $o^1 = 0$, $o^2 = 1/\sqrt{2}$, $o^3 = 1/\sqrt{2}$, $c = \cos(60°) = 1/2$, $s = \sin(60°) = \sqrt{3}/2$. Pro $R(\mathbf{v})$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Řešení podle (c):

Opět znormujeme vektor $\mathbf{o}$ na jednotkový: $\mathbf{o} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Uvažujme kvaternion $h = \cos(30°) + \sin(30°)\mathbf{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(j\frac{1}{\sqrt{2}} + k\frac{1}{\sqrt{2}})$. Počítejme podle (5):

$$\begin{aligned} h\mathbf{v}\bar{h} &= \big(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{2}} + k\frac{1}{2\sqrt{2}}\big)\big(i+k\big)\big(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{2}} - k\frac{1}{2\sqrt{2}}\big) = \\ &= \big(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}) + j\frac{1}{2\sqrt{2}} + k(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}})\big)\big(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{2}} - k\frac{1}{2\sqrt{2}}\big) = \\ &= \ldots = \frac{1}{4}\big(i(2+\sqrt{6}) + j(1+\sqrt{6}) + k(3-\sqrt{6})\big), \end{aligned}$$

což odpovídá vektoru $\frac{1}{4}(2+\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}, 3-\sqrt{6})^T$.