1) Spočtěte pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ (6b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

Pokud postup výpočtu vyžaduje jiných faktů či nějakých klasických vět, ověřte, že jsou splněny jejich předpoklady.

Řešení

Zřejmě $A = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln \frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}} = e^{L}$, (0,5)

kde $L = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ (0,5) díky spojitosti exp. (0,5)

Máme

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)\ln(x+a) + (x+b)\ln(x+b) - (2x+a+b)\ln(x+a+b)\right] \quad (0{,}5)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)\ln\frac{x+a}{x+a+b} + (x+b)\ln\frac{x+b}{x+a+b}\right] \quad (1)$$

Zřejmě

$$\lim_{x\to+\infty}(x+a)\ln\frac{x+a}{x+a+b} = \lim_{x\to+\infty}(x+a)\ln\left(1-\frac{b}{x+a+b}\right) = \quad (0{,}5)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-(x+a)}{x+a+b}\, b \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{b}{x+a+b}\right)}{\frac{-b}{x+a+b}}}_{\to 1 \text{ zákl. limita } (0{,}5)} = -b \quad (0{,}5)$$

Proto $L = -a-b$ (0,5)

$$\boxed{A = e^{-(a+b)}} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (0{,}5)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{x^{x+a}} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{a}$$

$$x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \to e^{a}$$

② Nađite primitivnu funkciju na otvorenom skupu $(-\pi, \pi)$, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~,

②

$$\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx$$

Rješenje:

Vrijedi je $\sin x - 2\cos x + 3 > 0$ 0,5 $\forall x \in \mathbb{R}$ a stoga je moguće provesti supstituciju $y = tg \frac{x}{2}$ 0,5. Tada

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy$$

1

$$I = \int \frac{\frac{2y}{1+y^2} + \frac{2(1-y^2)}{1+y^2} - 3}{\frac{2y}{1+y^2} - \frac{2(1-y^2)}{1+y^2} + 3} \frac{2}{1+y^2}\, dy$$ 0,5

$$= 2 \int \frac{2y + 2 - 2y^2 - 3 - 3y^2}{2y - 2 + 2y^2 + 3 + 3y^2} \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

$$= 2 \int \frac{-5y^2 + 2y - 1}{5y^2 + 2y + 1} \frac{1}{1+y^2}\, dy$$ 0,5

1

$$\frac{-5y^2 + 2y - 1}{5y^2 + 2y + 1} \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{Ay + B}{1+y^2} + \frac{Cy + D}{5y^2 + 2y + 1}$$ 0,5

0,5

$$Ay(5y^2 + 2y + 1) + B(5y^2 + 2y + 1) + Cy(1+y^2) + D(1+y^2) = -5y^2 + 2y - 1 \quad / y = i$$

$$Ai(-5 + 2i + 1) + B(-5 + 2i + 1) = 5 + 2i - 1$$

$$-2A - 4iA - 4B + 2iB = 4 + 2i$$

$$-2A - 4B = 4 \quad /:2$$

$$-4A + 2B = 2$$

$$-10B = 6 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{3}{5}}$$

$$A = -2B - 2 = -\frac{4}{5}$$

$$\boxed{A = -\frac{4}{5}}$$

$$5A + C = 0 \Rightarrow C = 4$$

$$B + D = -1 \Rightarrow D = -1 - B = -\frac{2}{5}$$

2

1

Zpolr

Tedy

$$I = 2\int \frac{-\frac{4}{5}y - \frac{3}{5}}{y^2+1}\,dy + 2\int \frac{4y - \frac{2}{5}}{5y^2+2y+1}\,dy$$ 0,5 2

$$= -\frac{4}{5}\ln(y^2+1) - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}(y) + \frac{4}{5}\int \frac{10y+2}{5y^2+2y+1}\,dy - \frac{12}{5}\int \frac{dy}{5y^2+2y+1}$$ 0,5 0,5 0,5

$$I_1 = -\frac{4}{5}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) - \frac{3}{5}x + C$$ 0,5 0.5

$$I_2 = \frac{4}{5}\ln\left(5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{12}{5}\int \frac{dy}{(\sqrt{5}y + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{4}{5}}$$ 0,5 1

$I_{2,2} =$ ~~$\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{2y+2}{5}\right)^2+1}$~~

$$= -\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{5y+1}{2}\right)^2+1} = -\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right) + C$$ 0,5

$$\boxed{I = -\frac{4}{5}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln\left(5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right) - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right) + C}$$ 0,5 b

$x \in (-\pi, \pi)$

(5) Vyšetřete průběh fce

3,5

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Řešení:

1, $D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ f je spojitá a nezáporná na $\mathbb{R}$

2, $f(-x) = \sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = f(x) \Rightarrow f$ je sudá, není periodická

3, $f(0) = 2$ $\quad$ $f > 0$ na $\mathbb{R}$ (součet dvou nezáporných fcí, které se nenulují v daném bodě)

4, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

1

1,5

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) \qquad x \neq \pm 1$$ 0,5

Podle věty o limitě derivace je

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow f'(1)$ neex. $\quad$ 0,5

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$ 0,5

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\right) \qquad x \neq \pm 1$$ 0,5

opět $f'' < 0$ na $D_{f''}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty \Rightarrow$$ fce nemá asymptoty

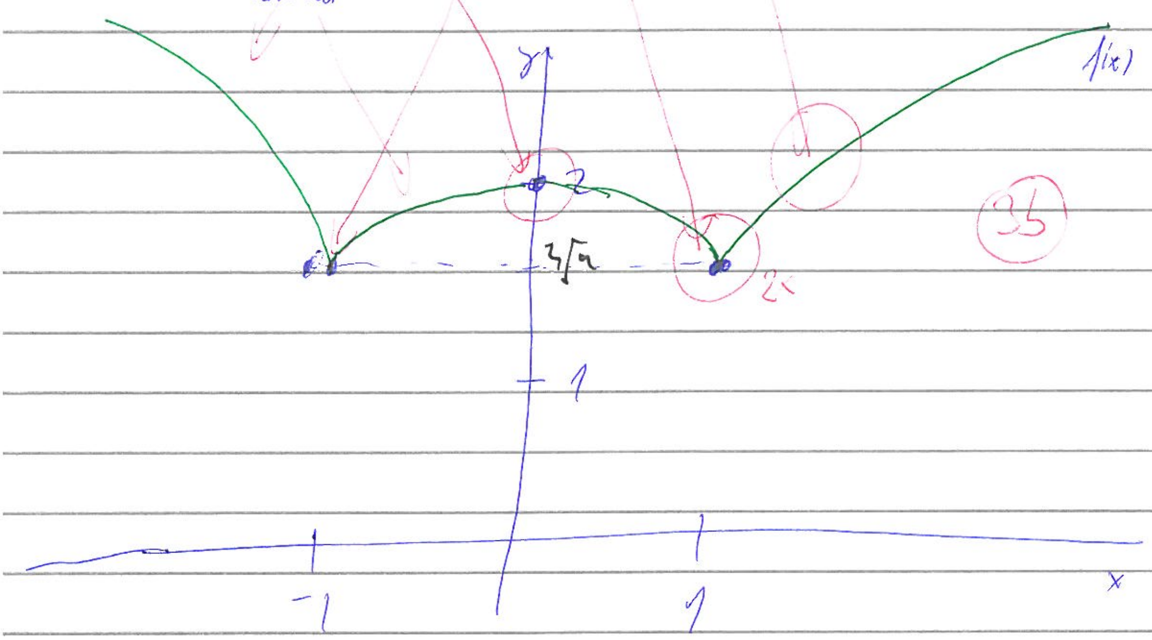
0,5

(1) pokr.

$R_f = [\sqrt[3]{4}, +\infty)$ 0,5

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
f	2	$+$	$\sqrt[3]{4} \approx 1.6$	$+$	$+\infty$
f'	0	$-$	neex. $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	$+$	
f''		$-$		$-$	
	lok. max	klesá konkávne	lok. min.	rastie konkávne	

1,5



(4) Uvažujte fci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x|<1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$

3,5

a) Ukažte, že f je spojitá na $\mathbb{R}$

b) Spočítejte $f'(x)$ pro $\begin{cases} |x|>1 \\ |x|<1 \end{cases}$

c) Ukažte, že $f'(\pm 1) = 0$, tedy f' je spojitá na $\mathbb{R}$.

Alternativně [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], že f' [illegible] [illegible].

Řešení

a) Zřejmě je $f(x)$ spojitá na $(-1,1)$ a $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ díky spojitosti fcí exp a rac. lomené fce 0,5

Přitom $\lim\limits_{x\to 1-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$. 0,5

$\frac{1}{1-x^2} \to +\infty$ pro $x \to 1-$, tedy 0,5

Proto je f spojitá na celém $\mathbb{R}$.

b) Je-li $|x|>1$, je $f'(x) = 0$ 0,5 (konst. fce)

Je-li $|x|<1$, je

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)^2}$$ 0,5

c) Dále použijeme větu o limitě derivace 0,5 (předpoklady jsou splněny (f je spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x)$ existuje mimo ± 1 okolí)). Potom

$\lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = 0$ tj. $f'(1+) = 0$ 0,5

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \underbrace{-2x}_{\text{omez.}} \cdot e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} = (\text{omez.} \times 0 = 0) = 0$$ 0,5

$$\lim_{x\to 1-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} \cdot y^2 = 0$$ 0,5

věta o limitě pro 2x L'Hospital.

Tedy také $f'(1-) = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$. 0,5

Analogicky se ukáže, že $f'(-1) = 0$, tedy f je spojitá na celém $\mathbb{R}$.