Příklady (15.1.)

(1) Spočtěte pro $a, b \in \mathbb{R}$

(5b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin^2(ax) + \cos(bx)\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg}^3 x}}$$

Řešení

Počítejme

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin^2(ax) + \cos(bx)\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg}^3 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\sin^2(ax)+\cos(bx)\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg}^3 x}}} =$$

$$= e^{L}$$

kde $L = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg}^3 x} \ln\left(\sin^2(ax) + \cos(bx)\right)$. (1b)

Byla použita spojitost fce exp.

Odtud tedy

$$L = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\operatorname{tg} x}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ dle } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \left(\sin^2(ax) + \cos(bx) - 1\right) \underbrace{\frac{\ln\left(\sin^2(ax)+\cos(bx)+1-1\right)}{\sin^2(ax)+\cos(bx)-1}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ dle } \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}}}$$

(0,5b) (1b)

Konečně

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(ax)}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\cos(bx)-1}{\operatorname{tg}^2 x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin^2(ax)}{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ a^2}} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} + \underbrace{\frac{\cos(bx)-1}{x^2}}_{-\frac{b^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\right) = a^2 - \frac{b^2}{2}.$$

(1b) (0,5b)

Celkem tedy: $L = a^2 - \frac{b^2}{2}$ (použita aritmetika limit, vše O.K.),

a proto

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin^2(ax) + \cos(bx)\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg}^3 x}} = \underline{e^{a^2 - \frac{b^2}{2}}}$$

(1b)

Platí pro $a, b \in \mathbb{R}$

(Je-li $a = 0$, $b = 0$ .. O.K. $\sin(ax) = 0$ ✓ $\cos(bx) = 1$ ✓

② Nalezněte primitivní fci na $\mathbb{R}$

⑦b

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$$

Řešení

Substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi, \pi)$ (0,5b) $\qquad \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \qquad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$

$$I = \int \frac{2dy}{1+y^2} \overset{(1b)}{\frac{1}{\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} + 2}} = \int \frac{2\,dy}{2y + 1 - y^2 + 2 + 2y^2} \;(0{,}5b) =$$

$$= \int \frac{2\,dy}{y^2 + 2y + 3}\; a = \int \frac{2\,dy}{(y+1)^2 + 2} = \int \frac{dy}{\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \;(1b)$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right) = \underbrace{\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}}\right)}\;(1b) \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

Ale $\sin x + \cos x + 2 \neq 0$ na $\mathbb{R}$, proto existuje prim. fce na $\mathbb{R}$. (0,5b)

Při přechodu $x = (2k+1)\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ – skok o $\sqrt{2}\pi$

$$\lim_{x \to \pi-} \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}} \Big\} (1b)$$

Tedy
$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}}\right) + k \cdot \pi\sqrt{2} & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \\ k \cdot \pi\sqrt{2} + \pi\frac{\sqrt{2}}{2} & x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

je primitivní fce na $\mathbb{R}$ $\qquad$ (1,5b)

③ Vyšetřete průběh fce

$f(x) = \ln(1 + |x^2 - x - 20|)$ $(\ln 21 \doteq 3{,}04)$

(10b)

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, nezáporná

$f(0) = \ln 21 \sim 3$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$ tj. $x = 5$, $x = -4$

- f není sudá ani lichá, ani periodická
- f nemá v ∞ asymptotu $\left(\underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty}, \text{ale} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right)$.

(2b)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + |x^2 - x - 20|} \cdot \operatorname{sign}(x^2 - x - 20) \cdot (2x - 1)$$

(0,5b)

derivace neex. v $x = -4$, $x = 5$ nulový bod: $\underline{x = \frac{1}{2}}$ (0,5b)

$f'_+(-4) = 9$ $f'_+(5) = 9$

$f'_-(-4) = -9$ $f'_-(5) = -9$ $\Big\}$ viz o limitě derivace $\Big\}$ (1b)

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + |x^2 - x - 20|)^2} \cdot (2x - 1)^2 + \frac{2 \operatorname{sign}(x^2 - x - 20)}{1 + |x^2 - x - 20|}$$

(1b)

$$= \frac{1}{(1 + |x^2 - x - 20|)^2} \left(2 \operatorname{sign}(x^2 - x - 20) + 2(x^2 - x - 20) - (2x - 1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(1 + |x^2 - x - 20|)^2} \left(\underbrace{-2x^2 - 41 + 2 \operatorname{sign}(x^2 - x - 20) + 2x}_{< 0 \text{ na } \mathbb{R}\,!}\right) \quad x \neq -4, 5$$

(0,5b)

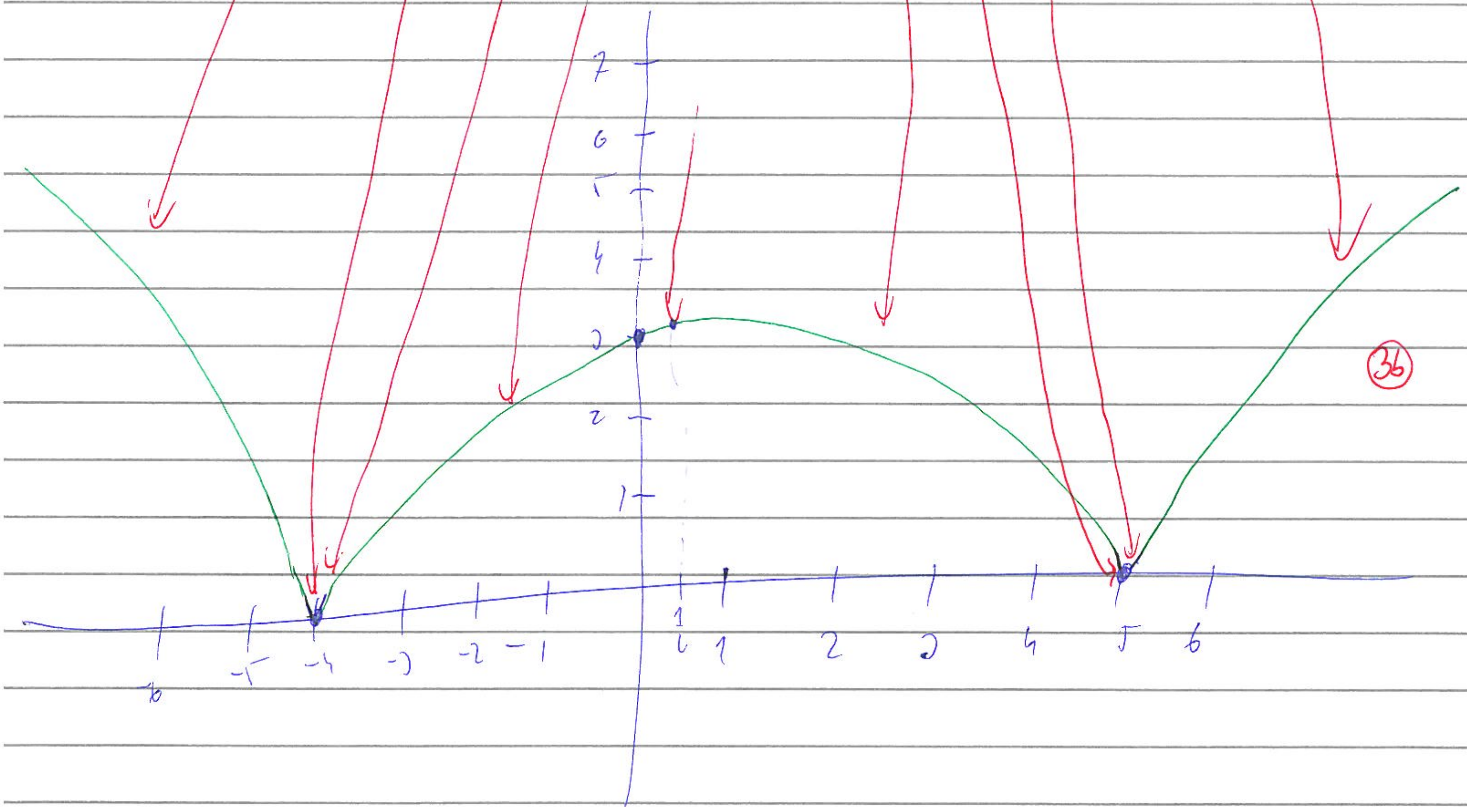
(1b)

f'' nemá nulový bod (0,5b)

3 koh

	$-\infty$	$(-\infty,-4)$	(-4)	$(-4,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},5)$	5	$(5,+\infty)$	$+\infty$
f	$+\infty$		0		≈ 3 $(\sqrt{10})$		0		$+\infty$
f'		$-$	$-$ 9 $+$ -9	$+$		$-$	$-$ -9 $+$ 9	$+$	
f''		$-$		$-$		$-$		$-$	
		klesá konk.	lok. min i glob.	rastie konkávne	lok max	klesá konkávne	lok. i glob. minim	rastie konkávne	

$R_f = [0,+\infty)$



④ Nechť pro jisté $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ je
(5b)

$$f(x) = \begin{cases} Ax + Bx^2 & x \geq 0 \\ \cos(bx) - a + \sin^2(ax) & x < 0. \end{cases}$$

a) Nalezněte všechna $A, B, b, a \in \mathbb{R}$ takové, aby f měla spojitou druhou derivaci na $\mathbb{R}$.

b) Je možno zaručit (vhodnou volbou parametrů A, B, a, b) i spojitost třetí derivace?

Řešení.

a) Aby mohla mít f druhou derivaci spojitou na $\mathbb{R}$, musí být spojitá f i f'. To vede na podmínky (rovnost obou ~~[illegible]~~ limit derivací) (1b)

$(f(0+) = f(0-))$ $\quad 0 = 1 - a \Rightarrow \boxed{a = 1},$ (1b)

$f'(0+) = f'(0-) \quad A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0},$ (1b)

A konečně musí platit rovnost druhých derivací

$f''(0+) = f''(0-) \Rightarrow 2B = -b^2\cos 0 + 2a^2\cos 0 \Rightarrow \underline{b^2 + 2B = 2}$ (1b)

Tedy za těchto podmínek je druhá derivace spojitá.

b) Zjevně $f'''_+(0) = 0$

$f'''_-(0) = +b^3\sin(bx)\Big|_{x=0} - 8a^3(+\cos(ax)\sin(ax))\Big|_{x=0} = 0$ (1b)

Tedy za předpokladu spojité druhé derivace je spojitá i derivace třetí.