Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 2.3.2022

Definice (10 Lineární nezávislost funkcí D 8.5.3)

Řekneme, že $u_1, \dots, u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jsou *lineárně nezávislé* na (a, b), jestliže pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \equiv 0 \qquad \text{na } (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

V opačném případě říkáme, že $u_1, \dots, u_n$ jsou *lineárně závislé* na (a, b).

Věta (6 O prostoru řešení homogenní rovnice V 8.5.4)

Množina všech řešení homogenní rovnice $Ly = 0$ tvoří n-dimenzionální podprostor prostoru $C^n((a, b))$.

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu
7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky I

Definice (10 Lineární nezávislost funkcí D 8.5.3)

Řekneme, že $u_1, \dots, u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jsou *lineárně nezávislé* na (a, b), jestliže pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \equiv 0 \quad \text{na } (a, b) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

V opačném případě říkáme, že $u_1, \dots, u_n$ jsou *lineárně závislé* na (a, b).

Věta (6 O prostoru řešení homogenní rovnice V 8.5.4)

Množina všech řešení homogenní rovnice $Ly = 0$ tvoří n-dimenzionální podprostor prostoru $C^n((a, b))$.

Definice (11 Fundamentální systém D 8.5.5)

Množina $u_1, \dots, u_n$ se nazývá *fundamentální systém* rovnice $Ly = 0$ na (a, b), jestliže funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a, b) a jsou zde lineárně nezávislé.

Definice (12 Wronskián D 8.5.6)

Wronského determinant (častěji zkráceně *wronskián*) funkcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ v bodě $x \in (a, b)$ je

$$W_{[u_1, u_2, \dots, u_n]}(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Výše uvedená matice se nazývá *Wronského matice*.

Definice (11 Fundamentální systém D 8.5.5)

Množina $u_1, \ldots, u_n$ se nazývá *fundamentální systém* rovnice $Ly = 0$ na (a, b), jestliže funkce $u_1, \ldots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a, b) a jsou zde lineárně nezávislé.

Definice (12 Wronskián D 8.5.6)

Wronského determinant (častěji zkráceně *wronskián*) funkcí $u_1, \ldots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ v bodě $x \in (a, b)$ je

$$W_{[u_1, u_2, \ldots, u_n]}(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} .$$

Výše uvedená matice se nazývá *Wronského matice*.

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \ldots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ *lineárně závislé na* (a, b), *pak* $W_{[u_1, u_2, \ldots, u_n]} \equiv 0$ *na* (a, b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \ldots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a, b). *Pak* $u_1, \ldots, u_n$ *jsou lineárně nezávislá na* (a, b) *právě tehdy, když existuje* $x_0 \in (a, b)$ *splňující* $W_{[u_1, u_2, \ldots, u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \ldots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a, b). *Označme* $W(x) = W_{[u_1, u_2, \ldots, u_n]}(x)$. *Pak*

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a, b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a, b)$ *máme*

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s}.$$

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu
7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky III

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ lineárně závislé na (a,b), pak $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]} \equiv 0$ na (a,b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a,b). Pak $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislá na (a,b) právě tehdy, když existuje $x_0 \in (a,b)$ splňující $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a,b). Označme $W(x) = W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x)$. Pak

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a,b)$ máme

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s}.$$

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu

7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky III

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ *lineárně závislé na* (a, b), *pak* $W_{[u_1, u_2, \dots, u_n]} \equiv 0$ *na* (a, b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \dots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a, b). *Pak* $u_1, \dots, u_n$ *jsou lineárně nezávislá na* (a, b) *právě tehdy, když existuje* $x_0 \in (a, b)$ *splňující* $W_{[u_1, u_2, \dots, u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \dots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a, b). *Označme* $W(x) = W_{[u_1, u_2, \dots, u_n]}(x)$. *Pak*

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a, b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a, b)$ *máme*

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s}.$$

Věta (10 Metoda variace konstant)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\{y_i\}_{i=1}^n$ je fundamentální systém rovnice $Ly = 0$ na $I \subset \mathbb{R}$. Nechť $\{c_i'\}_{i=1}^n$ je řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^n c_i' u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i' u_i' = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n c_i' u_i^{(n-2)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i' u_i^{(n-1)} = \frac{f}{a_n}.$$

Potom funkce

$$y_P(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x)$$

řeší rovnici $Ly = f$ na I.

7.4.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty I

Uvažujeme rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_i(x) = 0. \tag{1}$$

Definice (13 Charakteristický polynom)

Charakteristickým polynomem rovnice (1) nazýváme

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta (11 Případ různých kořenů)

Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, *potom* $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (1).

Uvažujeme rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_i(x) = 0. \tag{1}$$

Definice (13 Charakteristický polynom)

Charakteristickým polynomem rovnice (1) nazýváme

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta (11 Případ různých kořenů)

Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, *potom* $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (1).

7.4.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty I

Uvažujeme rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_i(x) = 0. \tag{1}$$

Definice (13 Charakteristický polynom)

Charakteristickým polynomem rovnice (1) nazýváme

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta (11 Případ různých kořenů)

Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, potom $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ tvoří fundamentální systém rovnice (1).

Věta (12 O vícenásobných kořenech charakteristického polynomu T 8.5.19)

Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Pak funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad x\mathrm{e}^{\lambda_j x}, x^2\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad \dots, \quad x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_j x}$$

řeší rovnici (1)*.*

Lemma (4; L 8.5.20)

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou různá komplexní čísla a $P_1, \dots, P_m$ jsou polynomy s komplexními koeficienty. Jestliže platí

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x} \equiv 0 \qquad \text{na } (a, b),$$

pak $P_i \equiv 0$ na (a, b) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$.

Věta (12 O vícenásobných kořenech charakteristického polynomu T 8.5.19)

Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Pak funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad x\mathrm{e}^{\lambda_j x}, x^2\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad \dots, \quad x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_j x}$$

řeší rovnici (1)*.*

Lemma (4; L 8.5.20)

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou různá komplexní čísla a $P_1, \dots, P_m$ jsou polynomy s komplexními koeficienty. Jestliže platí

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x} \equiv 0 \qquad na\ (a, b),$$

pak $P_i \equiv 0$ na (a, b) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$.