Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 10.3.2022

Definice (1 Řada D 9.1.1)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ budeme nazývat *řadou*. Pro $k \in \mathbb{N}$ se číslo a_k nazývá *k-tý člen*, číslo $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ se nazývá *n-tý částečný součet* a $\{s_n\}$ nazveme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Existuje-li vlastní $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že řada *konverguje*. Pokud je uvedená limita nevlastní, řada *diverguje* a pokud limita částečných součtů neexistuje, řada *osciluje*.
V prvních dvou případech číslo s nazýváme *součtem řady* a píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Věta (1 Nutná podmínka konvergence řady V 9.1.8)

Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Definice (1 Řada D 9.1.1)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ budeme nazývat *řadou*. Pro $k \in \mathbb{N}$ se číslo a_k nazývá *k-tý člen*, číslo $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ se nazývá *n-tý částečný součet* a $\{s_n\}$ nazveme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Existuje-li vlastní $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že řada *konverguje*. Pokud je uvedená limita nevlastní, řada *diverguje* a pokud limita částečných součtů neexistuje, řada *osciluje*.
V prvních dvou případech číslo s nazýváme *součtem řady* a píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Věta (1 Nutná podmínka konvergence řady V 9.1.8)

Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

8.1 Základní pojmy II

Věta (2 Leibnizovo kritérium V 9.1.21)

Nechť $\{a_n\}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost. Pak $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Věta (3 B–C podmínka pro řady V 9.1.9)

Číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když splňuje B–C podmínku

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Věta (4 Aritmetika řad V 9.1.13)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B,$$

kdykoliv má pravá strana smysl.

8.1 Základní pojmy II

Věta (2 Leibnizovo kritérium V 9.1.21)

Nechť $\{a_n\}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost. Pak $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Věta (3 B–C podmínka pro řady V 9.1.9)

Číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když splňuje B–C podmínku

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Věta (4 Aritmetika řad V 9.1.13)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B,$$

kdykoliv má pravá strana smysl.

8.1 Základní pojmy II

Věta (2 Leibnizovo kritérium V 9.1.21)

Nechť $\{a_n\}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost. Pak $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Věta (3 B–C podmínka pro řady V 9.1.9)

Číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když splňuje B–C podmínku

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Věta (4 Aritmetika řad V 9.1.13)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B,$$

kdykoliv má pravá strana smysl.

8.1 Základní pojmy III

Definice (2 Absolutní a neabsolutní konvergence D 9.1.15)

Říkáme, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ale nekonverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta (5 Absolutní konvergence implikuje konvergenci V 9.1.18)

Jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak konverguje klasicky.

Věta (6 Srovnávací kritérium I V 9.1.19)

Nechť pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$ a $|a_k| \leq b_k$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (dokonce absolutně).

Definice (2 Absolutní a neabsolutní konvergence D 9.1.15)

Říkáme, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ale nekonverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta (5 Absolutní konvergence implikuje konvergenci V 9.1.18)

Jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak konverguje klasicky.

Věta (6 Srovnávací kritérium I V 9.1.19)

Nechť pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$ a $|a_k| \leq b_k$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (dokonce absolutně).

Definice (2 Absolutní a neabsolutní konvergence D 9.1.15)

Říkáme, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně*, jestliže konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ale nekonverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta (5 Absolutní konvergence implikuje konvergenci V 9.1.18)

Jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak konverguje klasicky.

Věta (6 Srovnávací kritérium I V 9.1.19)

Nechť pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$ a $|a_k| \leq b_k$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (dokonce absolutně).

Věta (7 Srovnávací kritérium II V 9.2.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset [0, \infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(i) $a_k \geq b_k \quad \forall k \geq k_0$

(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \geq k_0$ *(tedy* $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$*)*

a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*

Věta (8 Limitní srovnávací kritérium V 9.2.3)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$ *a dále nechť* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, \infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě tehdy, když* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*

Jestliže $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in [0, \infty)$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*

Věta (7 Srovnávací kritérium II V 9.2.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset [0, \infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*
(i) $a_k \geq b_k \quad \forall k \geq k_0$
(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \geq k_0$ *(tedy* $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$*)*
a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*

Věta (8 Limitní srovnávací kritérium V 9.2.3)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$ *a dále nechť* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, \infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě tehdy, když* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*
Jestliže $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in [0, \infty)$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*

Věta (9 Cauchyovo odmocninové kritérium V 9.2.10)

Nechť $\{a_k\} \subset [0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (10 d'Alembertovo podílové kritérium V 9.2.13)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy II

Věta (9 Cauchyovo odmocninové kritérium V 9.2.10)

Nechť $\{a_k\} \subset [0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (10 d'Alembertovo podílové kritérium V 9.2.13)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (11 Integrální kritérium V 9.2.5)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, kladná a nerostoucí na $[a, \infty]$. Pak

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \textit{konverguje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{N}) \int_a^{\infty} f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Věta (12 Raabeho kritérium V 9.2.18)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Existuje-li $q > 1$ tak, že $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \geq q$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) > 1$, řada konverguje.*
(ii) *Jestliže $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \leq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1$, řada diverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy III

Věta (11 Integrální kritérium V 9.2.5)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, kladná a nerostoucí na $[a, \infty]$. Pak

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \textit{konverguje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{N}) \int_a^{\infty} f \, \mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Věta (12 Raabeho kritérium V 9.2.18)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Existuje-li $q > 1$ tak, že $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \geq q$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) > 1$, řada konverguje.*
(ii) *Jestliže $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \leq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1$, řada diverguje.*