Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 30.3.2022

9.3 Zavedení funkcí sin, cos a exp I

Věta (2.21 O funkcích sin a cos V 10.4.1)

Existují právě dvě funkce $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jediné iracionální číslo* π *tak, že platí*

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\sin(-x) = -\sin x$ *a* $\cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$

(5) $\sin 0 = 0$ *a* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(6) $\sin'(0) = 1$.

Věta (2.22 O exponenciále V 10.4.2)

Existuje právě jedna funkce $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že*

(13) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(14) $\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(15) $\exp 0 = 1$

(16) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *splňuje* $\exp' x = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(17) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *(reálná funkce) je rostoucí a jejím oborem hodnot je* $(0, \infty)$.

9.3 Zavedení funkcí sin, cos a exp I

Věta (2.21 O funkcích sin a cos V 10.4.1)

Existují právě dvě funkce $\sin, \cos \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jediné iracionální číslo* π *tak, že platí*

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\sin(-x) = -\sin x$ *a* $\cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$

(5) $\sin 0 = 0$ *a* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(6) $\sin'(0) = 1$.

Věta (2.22 O exponenciále V 10.4.2)

Existuje právě jedna funkce $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že*

(13) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(14) $\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(15) $\exp 0 = 1$

(16) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *splňuje* $\exp' x = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(17) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *(reálná funkce) je rostoucí a jejím oborem hodnot je* $(0, \infty)$.

10 Metrické prostory
10.1 Základní pojmy I

Definice (1 Metrika a metrický prostor D 11.1)

Nechť P je množina. Zobrazení $\varrho\colon P \times P \to [0,\infty)$ se nazývá *metrika*, jestliže má vlastnosti

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \varrho(x,y) \geq 0 \quad \text{a} \quad \varrho(x,y) = 0 \iff x = y \\ &\text{(ii) } \varrho(x,y) = \varrho(y,x) \\ &\text{(iii) } \varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z). \end{aligned} \tag{1}$$

V takovém případě se dvojice (P,ϱ) nazývá *metrický prostor*.

Definice (2 Norma a normovaný lineární prostor D 11.1.5)

Nechť V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ (či $\mathbb{C}$). Zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$ se nazývá *norma*, jestliže pro všechna $u, v \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) splňuje

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \|u\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|u\| = 0 \iff u = 0 \\ &\text{(ii) } \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \\ &\text{(iii) } \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned} \tag{2}$$

Dvojice $(V,\|\cdot\|)$ se pak nazývá *normovaný lineární prostor*.

10 Metrické prostory
10.1 Základní pojmy I

Definice (1 Metrika a metrický prostor D 11.1)

Nechť P je množina. Zobrazení $\varrho\colon P \times P \to [0, \infty)$ se nazývá *metrika*, jestliže má vlastnosti

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \varrho(x,y) \geq 0 \quad \text{a} \quad \varrho(x,y) = 0 \iff x = y \\
&\text{(ii) } \varrho(x,y) = \varrho(y,x) \\
&\text{(iii) } \varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z).
\end{aligned} \tag{1}$$

V takovém případě se dvojice (P, ϱ) nazývá *metrický prostor*.

Definice (2 Norma a normovaný lineární prostor D 11.1.5)

Nechť V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ (či $\mathbb{C}$). Zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$ se nazývá *norma*, jestliže pro všechna $u, v \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) splňuje

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \|u\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|u\| = 0 \iff u = 0 \\
&\text{(ii) } \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \\
&\text{(iii) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.
\end{aligned} \tag{2}$$

Dvojice $(V, \|\cdot\|)$ se pak nazývá *normovaný lineární prostor*.

10.1 Základní pojmy II

Lemma (1 T 11.1.7)

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení* $\varrho\colon V \times V \to [0, \infty)$ *definované předpisem*

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

je metrika na V*.*

Definice (3 Skalární součin D 11.1.10)

Nechť V je vektorový prostor. Potom zobrazení $(\cdot, \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže pro všechna $x, y, z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ platí

$$\begin{aligned} &\text{(i) } (x, x) \geq 0 \quad \text{a} \quad (x, x) = 0 \iff x = 0 \\ &\text{(ii) } (x, y) = \overline{(y, x)} \\ &\text{(iii) } (\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad \text{a} \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z). \end{aligned} \tag{3}$$

Lemma (1 T 11.1.7)

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení* $\varrho\colon V \times V \to [0,\infty)$ *definované předpisem*

$$\varrho(x,y) = \|x - y\|$$

je metrika na V*.*

Definice (3 Skalární součin D 11.1.10)

Nechť V je vektorový prostor. Potom zobrazení $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže pro všechna $x, y, z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ platí

$$\begin{aligned} &\text{(i) } (x,x) \geq 0 \quad \text{a} \quad (x,x) = 0 \iff x = 0 \\ &\text{(ii) } (x,y) = \overline{(y,x)} \\ &\text{(iii) } (\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \text{a} \quad (x+y,z) = (x,z) + (y,z). \end{aligned} \tag{3}$$

10.1 Základní pojmy III

Lemma (2 Cauchy–Schwarzova nerovnost V 11.1.12)

Nechť P je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in P$ platí

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Věta (1 Skalární součin generuje normu V 11.1.13)

Nechť P je prostor se skalárním součinem. Pak zobrazení $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$ definované předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

je normou na P.

10.1 Základní pojmy III

Lemma (2 Cauchy–Schwarzova nerovnost V 11.1.12)

Nechť P je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in P$ platí

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Věta (1 Skalární součin generuje normu V 11.1.13)

Nechť P je prostor se skalárním součinem. Pak zobrazení $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty)$ definované předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

je normou na P.

10.1 Základní pojmy IV

Lemma (3 Pozn. 11.1.17)

Nechť $\varrho(\cdot,\cdot)$ je metrika a (P,ϱ) je metrický prostor. Potom pro libovolné x, y a $z \in P$ platí

$$|\varrho(x,y) - \varrho(x,z)| \leq \varrho(y,z).$$

Lemma (4 Pozn. 11.1.17)

Nechť $\|\cdot\|$ je norma na vektorovém prostoru V. Potom pro libovolné x, $y \in V$ platí

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

10.1 Základní pojmy IV

Lemma (3 Pozn. 11.1.17)

Nechť $\varrho(\cdot,\cdot)$ *je metrika a* (P,ϱ) *je metrický prostor. Potom pro libovolné* x, y *a* $z \in P$ *platí*

$$|\varrho(x,y) - \varrho(x,z)| \leq \varrho(y,z).$$

Lemma (4 Pozn. 11.1.17)

Nechť $\|\cdot\|$ *je norma na vektorovém prostoru* V. *Potom pro libovolné* x, $y \in V$ *platí*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$