Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 31.3.2022

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru I

Definice (4 Konvergence v metrickém prostoru D 11.2.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\} \subset P$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in P$ pro $n \to \infty$, jestliže $\varrho(x_n, x) \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (5 Konvergence v normovaném prostoru Pozn. 11.2.4)

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $\{x_n\} \subset V$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in V$ pro $n \to \infty$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (6 Ekvivalentní normy a metriky D 11.2.6)

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že tyto metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že na P platí

$$c_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq c_2 \varrho_1(x, y).$$

Analogicky se definují ekvivalentní normy podmínkou

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru I

Definice (4 Konvergence v metrickém prostoru D 11.2.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\} \subset P$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in P$ pro $n \to \infty$, jestliže $\varrho(x_n, x) \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (5 Konvergence v normovaném prostoru Pozn. 11.2.4)

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $\{x_n\} \subset V$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in V$ pro $n \to \infty$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (6 Ekvivalentní normy a metriky D 11.2.6)

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že tyto metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že na P platí

$$c_1 \varrho_1(x, y) \le \varrho_2(x, y) \le c_2 \varrho_1(x, y).$$

Analogicky se definují ekvivalentní normy podmínkou

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1.$$

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru I

Definice (4 Konvergence v metrickém prostoru D 11.2.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\} \subset P$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in P$ pro $n \to \infty$, jestliže $\varrho(x_n, x) \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (5 Konvergence v normovaném prostoru Pozn. 11.2.4)

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $\{x_n\} \subset V$ je posloupnost. Řekneme, že x_n *konverguje* k $x \in V$ pro $n \to \infty$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$. V takovém případě píšeme $x_n \to x$.

Definice (6 Ekvivalentní normy a metriky D 11.2.6)

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že tyto metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že na P platí

$$c_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq c_2 \varrho_1(x, y).$$

Analogicky se definují ekvivalentní normy podmínkou

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru II

Věta (2 Ekvivalentní metriky generují stejnou konvergenci V 11.2.9)

Nechť P je množina a ϱ_1, ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky na P. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$ platí

$$x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_2.$$

Věta (3 O spojitosti metriky, normy a skalárního součinu V 11.2.12)

(i) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$ v metrickém prostoru (P, ϱ), pak $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.*
(ii) *Jestliže $x_n \to x$ v normovaném lineárním prostoru $(V, \|\cdot\|)$, pak $\|x_n\| \to \|x\|$.*
(iii) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$v prostoru se skalárním součinem, pak $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Důsledek (1 Důsl. 11.2.13)

Konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru má omezené normy.

Věta (2 Ekvivalentní metriky generují stejnou konvergenci V 11.2.9)

Nechť P je množina a ϱ_1, ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky na P. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$ platí

$$x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_2.$$

Věta (3 O spojitosti metriky, normy a skalárního součinu V 11.2.12)

(i) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$ v metrickém prostoru (P, ϱ), pak $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.*
(ii) *Jestliže $x_n \to x$ v normovaném lineárním prostoru $(V, \|\cdot\|)$, pak $\|x_n\| \to \|x\|$.*
(iii) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$v prostoru se skalárním součinem, pak $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Důsledek (1 Důsl. 11.2.13)

Konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru má omezené normy.

10.2 Konvergence posloupnosti v metrickém prostoru II

Věta (2 Ekvivalentní metriky generují stejnou konvergenci V 11.2.9)

Nechť P je množina a ϱ_1, ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky na P. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$ platí

$$x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x \text{ v metrice } \varrho_2.$$

Věta (3 O spojitosti metriky, normy a skalárního součinu V 11.2.12)

(i) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$ v metrickém prostoru (P, ϱ), pak $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.*
(ii) *Jestliže $x_n \to x$ v normovaném lineárním prostoru $(V, \|\cdot\|)$, pak $\|x_n\| \to \|x\|$.*
(iii) *Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$v prostoru se skalárním součinem, pak $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Důsledek (1 Důsl. 11.2.13)

Konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru má omezené normy.

Věta (4 O vztahu konvergence v normě ke konvergenci po složkách V 11.2.10)

Nechť P je normovaný lineární prostor, $\{e_1, \ldots, e_N\}$ je jeho báze, $x_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n e_i$ a $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$, kde $\alpha_i^n, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ pro $i \in \{1, \ldots, N\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$x_n \to x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_i^n \to \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Věta (5 O ekvivalenci norem v konečné dimenzi V 11.2.11)

Na konečnědimenzionálním lineárním prostoru jsou libovolné dvě normy ekvivalentní.

Věta (4 O vztahu konvergence v normě ke konvergenci po složkách V 11.2.10)

Nechť P je normovaný lineární prostor, $\{e_1, \dots, e_N\}$ *je jeho báze,* $x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$ *a* $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$, *kde* $\alpha_i^n, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ *pro* $i \in \{1, \dots, N\}$ *a pro* $n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$x_n \to x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_i^n \to \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (5 O ekvivalenci norem v konečné dimenzi V 11.2.11)

Na konečnědimenzionálním lineárním prostoru jsou libovolné dvě normy ekvivalentní.

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P \colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru I

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P \colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru I

Definice (7 Okolí v metrickém prostoru D 11.3.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množina

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in P \colon \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

se nazývá ε-ovým *okolím* bodu x_0. *Prstencové* ε-ové *okolí* bodu x_0 definujeme jako

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definice (8 Otevřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $G \subset P$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které leží v G.

Definice (9 Uzavřená množina D 11.3.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $F \subset P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže je doplňkem otevřené množiny.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru II

Věta (6 O sjednocení a průniku otevřených a uzavřených množin V 11.3.9)

Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřené, průnik konečného systému otevřených množin je otevřený. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřený, sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřené.

Definice (10 Vnitřní, vnější a hraniční body D 11.3.13)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že bod $x_0 \in A$ je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje jeho okolí ležící v A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *vnějším* bodem množiny A, jestliže je vnitřním bodem jejího doplňku. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hraničním* bodem množiny A, jestliže není vnitřním ani vnějším bodem množiny A.

Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* množiny A a značí se A°. Množina všech vnějších bodů se nazývá *vnějšek* množiny A, množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* množiny A a značí se ∂A. Množinu $\overline{A} := A \cup \partial A$ nazýváme *uzávěr* množiny A.

Věta (6 O sjednocení a průniku otevřených a uzavřených množin V 11.3.9)

Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřené, průnik konečného systému otevřených množin je otevřený. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřený, sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřené.

Definice (10 Vnitřní, vnější a hraniční body D 11.3.13)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že bod $x_0 \in A$ je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje jeho okolí ležící v A. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *vnějším* bodem množiny A, jestliže je vnitřním bodem jejího doplňku. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *hraničním* bodem množiny A, jestliže není vnitřním ani vnějším bodem množiny A.
Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* množiny A a značí se A°.
Množina všech vnějších bodů se nazývá *vnějšek* množiny A, množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* množiny A a značí se ∂A. Množinu $\overline{A} := A \cup \partial A$ nazýváme *uzávěr* množiny A.

10.3 Základní vlastnosti podmnožin metrického prostoru III

Věta (7 Charakterizace vnitřku a uzávěru pomocí inkluze V 11.3.15)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak A° je největší otevřená podmnožina A a $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A.