Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 13.4.2022

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ je cauchyovská. Pak je A omezená.

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

10.6 Omezené a kompaktní množiny I

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ je cauchyovská. Pak je A omezená.

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

10.6 Omezené a kompaktní množiny I

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ *je cauchyovská. Pak je* A *omezená.*

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)
Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak A je omezená a uzavřená.

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)
V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)
Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$ *je kompaktní. Pak* A *je omezená a uzavřená.*

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)

V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$ *je kompaktní. Pak* A *je omezená a uzavřená.*

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)

V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

10.6 Omezené a kompaktní množiny III

Věta (22 Cantorova věta o průniku kompaktů V 11.6.12)

Nechť $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ je posloupnost neprázdných kompaktů v metrickém prostoru. Pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je neprázdný kompakt.

Definice (19 Pokrytí množiny D 11.7.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$, I je indexová množina a $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém podmnožin P. Řekneme, že $\{M_\alpha\}$ je *pokrytí* A, jestliže $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Jsou-li všechny množiny v systému $\{M_\alpha\}$ otevřené, hovoříme o *otevřeném pokrytí*.

Věta (23 Lindelöfova pokrývací věta V 11.7.2)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je separabilní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat nejvýše spočetné podpokrytí (podsystém stále pokrývající A).

Věta (24 Borelova pokrývací věta V 11.7.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat konečné podpokrytí.

10.7 Pokrývací věty I

Definice (19 Pokrytí množiny D 11.7.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$, I je indexová množina a $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém podmnožin P. Řekneme, že $\{M_\alpha\}$ je *pokrytí* A, jestliže $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Jsou-li všechny množiny v systému $\{M_\alpha\}$ otevřené, hovoříme o *otevřeném pokrytí*.

Věta (23 Lindelöfova pokrývací věta V 11.7.2)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je separabilní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat nejvýše spočetné podpokrytí (podsystém stále pokrývající A).

Věta (24 Borelova pokrývací věta V 11.7.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat konečné podpokrytí.

10.7 Pokrývací věty I

Definice (19 Pokrytí množiny D 11.7.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$, I je indexová množina a $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém podmnožin P. Řekneme, že $\{M_\alpha\}$ je *pokrytí* A, jestliže $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Jsou-li všechny množiny v systému $\{M_\alpha\}$ otevřené, hovoříme o *otevřeném pokrytí*.

Věta (23 Lindelöfova pokrývací věta V 11.7.2)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je separabilní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat nejvýše spočetné podpokrytí (podsystém stále pokrývající A).

Věta (24 Borelova pokrývací věta V 11.7.3)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat konečné podpokrytí.

10.7 Pokrývací věty II

Definice (20 Interval D 11.7.7)

Intervalem v $\mathbb{R}^N$ nazveme množinu tvaru $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$, kde $I_1, \ldots, I_N$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Je-li množina I otevřená, hovoříme o otevřeném intervalu. Podobně se definují uzavřené, omezené a kompaktní intervaly.

Věta (26 T 11.7.8)

Interval $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \subset \mathbb{R}^N$ je otevřený právě tehdy, když je každý z intervalů $I_1, \ldots, I_N$ otevřený. Analogická tvrzení platí pro uzavřenost, omezenost a kompaktnost.

Věta (26 Charakterizace otevřené množiny pomocí otevřených intervalů V 11.7.9)

Nechť A je otevřená množina v $\mathbb{R}^N$. Pak existuje spočetný systém otevřených omezených intervalů $\{I_n\}$ takový, že $A = \bigcup I_n$.

10.7 Pokrývací věty II

Definice (20 Interval D 11.7.7)

Intervalem v $\mathbb{R}^N$ nazveme množinu tvaru $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$, kde $I_1, \ldots, I_N$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Je-li množina I otevřená, hovoříme o otevřeném intervalu. Podobně se definují uzavřené, omezené a kompaktní intervaly.

Věta (26 T 11.7.8)

Interval $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \subset \mathbb{R}^N$ je otevřený právě tehdy, když je každý z intervalů $I_1, \ldots, I_N$ otevřený. Analogická tvrzení platí pro uzavřenost, omezenost a kompaktnost.

Věta (26 Charakterizace otevřené množiny pomocí otevřených intervalů V 11.7.9)

Nechť A je otevřená množina v $\mathbb{R}^N$. Pak existuje spočetný systém otevřených omezených intervalů $\{I_n\}$ takový, že $A = \bigcup I_n$.

10.7 Pokrývací věty II

Definice (20 Interval D 11.7.7)

Intervalem v $\mathbb{R}^N$ nazveme množinu tvaru $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$, kde $I_1, \ldots, I_N$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Je-li množina I otevřená, hovoříme o otevřeném intervalu. Podobně se definují uzavřené, omezené a kompaktní intervaly.

Věta (26 T 11.7.8)

Interval $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \subset \mathbb{R}^N$ je otevřený právě tehdy, když je každý z intervalů $I_1, \ldots, I_N$ otevřený. Analogická tvrzení platí pro uzavřenost, omezenost a kompaktnost.

Věta (26 Charakterizace otevřené množiny pomocí otevřených intervalů V 11.7.9)

Nechť A je otevřená množina v $\mathbb{R}^N$. Pak existuje spočetný systém otevřených omezených intervalů $\{I_n\}$ takový, že $A = \bigcup I_n$.

10.7 Banachova věta o kontrakci I

Definice (21 Kontraktivní zobrazení D 11.8.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $T\colon P \to P$ je zobrazení definované na celém P. Řekneme, že T je *kontraktivní* zobrazení (nebo stručně *kontrakce*), jestliže existuje $q \in [0, 1)$ tak, že

$$\varrho(Tx, Ty) \leq q\varrho(x, y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in P.$$

Bod x_0 se nazývá *pevný bod* zobrazení T, jestliže $Tx_0 = x_0$.

Věta (27 Banachova věta o kontrakci V 11.8.2)

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $T\colon P \to P$ je kontraktivní zobrazení definované na celém P. Pak má právě jeden pevný bod.
Dokonce pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ splňující $x_{n+1} = Tx_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ($x_1 \in P$ je libovolné) platí $x_n \to x_0$, kde x_0 je zmíněný pevný bod zobrazení T.

10.7 Banachova věta o kontrakci I

Definice (21 Kontraktivní zobrazení D 11.8.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $T\colon P \to P$ je zobrazení definované na celém P. Řekneme, že T je *kontraktivní* zobrazení (nebo stručně *kontrakce*), jestliže existuje $q \in [0, 1)$ tak, že

$$\varrho(Tx, Ty) \leq q\varrho(x, y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in P.$$

Bod x_0 se nazývá *pevný bod* zobrazení T, jestliže $Tx_0 = x_0$.

Věta (27 Banachova věta o kontrakci V 11.8.2)

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $T\colon P \to P$ je kontraktivní zobrazení definované na celém P. Pak má právě jeden pevný bod.
Dokonce pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ splňující $x_{n+1} = Tx_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ($x_1 \in P$ je libovolné) platí $x_n \to x_0$, kde x_0 je zmíněný pevný bod zobrazení T.