Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 5.5.2022

Definice (16 Regulární zobrazení D 12.8.2)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* na Ω, jestliže

(i) množina Ω je otevřená

(ii) $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

(iii) $\mathrm{J}_{\mathbf{f}} \neq 0$ na Ω.

Věta (22 O inverzi (lokální verze) V 12.8.5)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární zobrazení na $\mathcal{U}_\tau(a)$ pro jistá $a \in \mathbb{R}^N$ a $\tau > 0$. Pak existuje $\sigma > 0$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $\mathbf{f}$ *je prosté na* $\mathcal{U}_\sigma(a)$

(ii) $\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a))$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^N$ *(s jakoukoliv normou)*

(iii) *značí-li φ inverzní zobrazení k $\mathbf{f}|_{\mathcal{U}_\sigma(a)}$, pak $\varphi \in C^1(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$*

(iv) $\mathrm{J}_\varphi(\mathbf{f}(x)) = \frac{1}{\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathcal{U}_\sigma(a)$

(v) *pokud $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{U}_\tau(a); \mathbb{R}^N)$, pak $\varphi \in C^k(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$.*

11.8 Věta o regulárním zobrazení I

Definice (16 Regulární zobrazení D 12.8.2)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* na Ω, jestliže

(i) množina Ω je otevřená

(ii) $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

(iii) $\mathrm{J}_{\mathbf{f}} \neq 0$ na Ω.

Věta (22 O inverzi (lokální verze) V 12.8.5)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární zobrazení na $\mathcal{U}_\tau(a)$ pro jistá $a \in \mathbb{R}^N$ a $\tau > 0$. Pak existuje $\sigma > 0$ s následujícími vlastnostmi:

(i) *$\mathbf{f}$ je prosté na $\mathcal{U}_\sigma(a)$*

(ii) *$\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a))$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ (s jakoukoliv normou)*

(iii) *značí-li φ inverzní zobrazení k $\mathbf{f}|_{\mathcal{U}_\sigma(a)}$, pak $\varphi \in C^1(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$*

(iv) *$\mathrm{J}_\varphi(\mathbf{f}(x)) = \frac{1}{\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x)}$ pro všechna $x \in \mathcal{U}_\sigma(a)$*

(v) *pokud $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{U}_\tau(a); \mathbb{R}^N)$, pak $\varphi \in C^k(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$.*

11.8 Věta o regulárním zobrazení II

Věta (23 O inverzi (globální verze) V 12.8.7)

Nechť $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *je regulární zobrazení na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Pak*
(i) $\mathbf{f}(\Omega)$ *je otevřená množina*
(ii) $\mathbf{f}$ *je lokálně prosté, neboli ke každému bodu z* Ω *existuje okolí, kde* $\mathbf{f}$ *je prosté.*
Je-li navíc $\mathbf{f}$ *prosté na* Ω, *odpovídající inverzní zobrazení je regulární na* $\mathbf{f}(\Omega)$ *a pro každé* $x \in \Omega$ *je Jacobiho matice* $\mathbf{f}$ *v bodě* x *inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení* $\mathbf{f}^{-1}$ *v bodě* $\mathbf{f}(x)$.
Je-li $\mathbf{f}$ *prosté na* Ω, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a* $\mathbf{f} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$, *pak* $\mathbf{f}^{-1} \in C^k(\mathbf{f}(\Omega); \mathbb{R}^N)$.

Definice (1 Funkcionál D 13.1.2)

Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál*.

Definice (2 Gateauxův a Fréchetův diferenciál D 13.2.1)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_F$.
(i) Nechť $h \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + th\colon |t| < \delta\} \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Gateauxův diferenciál* ve směru h (nebo též *Gateauxovu derivaci* ve směru h), jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(a+th)|_{t=0}.$$

Tuto limitu pak značíme $\delta F(a; h)$ a nazýváme ji *Gateauxovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a ve směru h.
(ii) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Fréchetův diferenciál*, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál $L\colon X \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Lh}{\|h\|_X} = 0.$$

Zmíněný lineární funkcionál pak značíme $\mathrm{d}F(a)$ a nazýváme jej *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a.

Definice (1 Funkcionál D 13.1.2)

Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál*.

Definice (2 Gateauxův a Fréchetův diferenciál D 13.2.1)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_F$.
(i) Nechť $h \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + th\colon |t| < \delta\} \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Gateauxův diferenciál* ve směru h (nebo též *Gateauxovu derivaci* ve směru h), jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(a+th)|_{t=0}.$$

Tuto limitu pak značíme $\delta F(a;h)$ a nazýváme ji *Gateauxovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a ve směru h.
(ii) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Fréchetův diferenciál*, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál $L\colon X \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Lh}{\|h\|_X} = 0.$$

Zmíněný lineární funkcionál pak značíme $\mathrm{d}F(a)$ a nazýváme jej *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a.

Definice (3 Lokální minimum D 13.2.5)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *bodem lokálního minima* funkcionálu F, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$F(a) \leq F(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap D_F.$$

V případě ostré nerovnosti na $\mathcal{P}_\varepsilon(a) \cap D_F$ hovoříme o ostrém lokálním minimu. Analogicky se definuje lokální maximum.

Definice (4 Stacionární bod D 13.2.6)

Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *stacionárním bodem* (nebo *kritickým bodem*) funkcionálu F, jestliže

$$\delta F(a; h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X.$$

Definice (3 Lokální minimum D 13.2.5)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *bodem lokálního minima* funkcionálu F, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$F(a) \leq F(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap D_F.$$

V případě ostré nerovnosti na $\mathcal{P}_\varepsilon(a) \cap D_F$ hovoříme o ostrém lokálním minimu. Analogicky se definuje lokální maximum.

Definice (4 Stacionární bod D 13.2.6)

Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *stacionárním bodem* (nebo *kritickým bodem*) funkcionálu F, jestliže

$$\delta F(a; h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X.$$

Věta (1 Eulerova nutná podmínka V 13.2.7)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$, je definován na nějakém okolí bodu a a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta F(a; h)$, pak $\delta F(a; h) = 0$.

Definice (5 Druhý Gateauxův diferenciál D 13.2.10)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál, $a, h, k \in X$ a existuje $\delta F(a; h)$. Nechť existuje vlastní

$$\delta^2 F(a; h, k) := \lim_{t \to 0} \frac{\delta F(a + tk; h) - \delta F(a; h)}{t}.$$

Pak $\delta^2 F(a; h, k)$ nazýváme *druhým Gateauxovým diferenciálem* ve směrech h a k.

Věta (1 Eulerova nutná podmínka V 13.2.7)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$, je definován na nějakém okolí bodu a a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta F(a; h)$, pak $\delta F(a; h) = 0$.

Definice (5 Druhý Gateauxův diferenciál D 13.2.10)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál, $a, h, k \in X$ a existuje $\delta F(a; h)$. Nechť existuje vlastní

$$\delta^2 F(a; h, k) := \lim_{t \to 0} \frac{\delta F(a + tk; h) - \delta F(a; h)}{t}.$$

Pak $\delta^2 F(a; h, k)$ nazýváme *druhým Gateauxovým diferenciálem* ve směrech h a k.

12.2 Abstraktní teorie IV

Věta (2 Lagrangeova nutná podmínka V 13.2.12)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální minimum v bodě $a \in X$ a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta^2 F(a; h, h)$, pak $\delta^2 F(a; h, h) \geq 0$.

Věta (3 Lagrangeova postačující podmínka (zeslabená verze) V 13.2.4)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $a \in X$ je stacionárním bodem funkcionálu $F\colon X \to \mathbb{R}$. Jestliže existuje okolí bodu a, kde platí $\delta^2 F(x; h, h) \geq 0$ pro všechna $h \in X$, pak F má v bodě a lokální minimum.

12.2 Abstraktní teorie IV

Věta (2 Lagrangeova nutná podmínka V 13.2.12)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální minimum v bodě $a \in X$ a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta^2 F(a; h, h)$, pak $\delta^2 F(a; h, h) \geq 0$.

Věta (3 Lagrangeova postačující podmínka (zeslabená verze) V 13.2.4)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $a \in X$ je stacionárním bodem funkcionálu $F\colon X \to \mathbb{R}$. Jestliže existuje okolí bodu a, kde platí $\delta^2 F(x; h, h) \geq 0$ pro všechna $h \in X$, pak F má v bodě a lokální minimum.