(28)

(1) Nalezněte řešení ODR

(7,5)

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = e^{2x} + \cos 2x$$

splňující $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 1$.

Řešení

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 2) + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0$$ 0,5b

$\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$ $\lambda_3 = 2$ 0,5b

$$y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x}$$ 0,5b

$$y_p(x) = Axe^{2x} + B\cos 2x + C\sin 2x$$ 1b

$$y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$
$$y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$
$$y_p''' \quad 8Axe^{2x} + 12Ae^{2x} + 8B\sin 2x - 8C\cos 2x$$ 1b

$$xe^{2x}(8A - 8A + 2A - 2A) + e^{2x}(12A - 8A + A) + \cos 2x(-8C + 8B + 2C - 2B)$$
$$+ \sin 2x(8B + 8C - 2B - 2C) = e^{2x} + \cos 2x$$

$$5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$
$$-6C + 6B = 1 \Rightarrow 12B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{12} \quad C = -\frac{1}{12}$$
$$6B + 6C = 0 \Rightarrow -B = +C$$ 1b

$$y = \alpha\cos x + \beta\sin x + \gamma e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x} + \frac{1}{12}\cos 2x - \frac{1}{12}\sin 2x$$ 0,5b

$$1 = \alpha + \gamma + \frac{1}{12}$$
$$0 = \beta + 2\gamma + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \Rightarrow 2 = 5\gamma + \frac{4}{5} - \frac{3}{12}$$
$$1 = -\alpha + 4\gamma + \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \qquad \frac{120 - 48 + 15}{60} = 5\gamma$$ 1b

$$\gamma = \frac{87}{300} \qquad \alpha = \frac{11}{12} - \frac{87}{300} = \frac{275 - 87}{300} = \frac{188}{300} = \frac{47}{75}$$

$$\beta = \frac{-1}{300} - \frac{87}{150} = \frac{-92}{150} = -\frac{46}{75}$$ 1b

$$y = \frac{47}{75}\cos x - \frac{46}{75}\sin x + \frac{87}{300}e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x} + \frac{1}{12}e^{2x} - \frac{1}{12}\sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

26.5

2 6b

V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci /divergenci/oscilaci číselné řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\sin \min\left(\frac{1}{k^p}, 1\right)\right) \ln^p k$$

Pro které hodnoty parametru p je konvergence absolutní?

Řešení

a) Je-li $p > 0$, pak $\sin \frac{1}{k^p} \approx \frac{1}{k^p}$ 1b

$\ln^p k$

Tedy hodnotu píšeme $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_k$, kde $A_k \downarrow 0$ 1b

(vzhledem k $\frac{1}{k^p}$ přebíjí $\ln^p k$ od jistého k_0)

$\Rightarrow$ ŘADA KONVERGUJE (Leibniz) 0,5b

Je-li $p > 1$, pak $|A_k| \leq \frac{1}{k^{p-\varepsilon}}$ a řada K absolutně (srovnávací krit.) 1b

b) Je-li $p = 0$ $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k$ osciluje 1b

c) Je-li $p < 0$ $\frac{1}{k^p} > 1$

$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (\sin 1) \ln^p k$ pak konverguje, protože $\ln^p k \downarrow 0$. 1b

Konvergence ovšem neabsolutní ($\ln^p k \geq \frac{1}{k^{1/2}}$ např.). 0,5b

(26.5)

(3) Nalezněte lokální extrémy funkce

(9b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2+10y-5)$

na $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, ve kterých bodech má fce lok. minimum a ve kterých lokální maximum a rozhodněte (pokud ∃) jestli globální extrém fce na $\mathbb{R}^2$.

Řešení

Tj. hledáme lok. extrémy jsou v bodech kde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 0,5

Proto $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)}(2x - 2x(x^2+10y-5)) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)}(10 - 2y(x^2+10y-5)) = 0$ 1b

Tedy

$2x(1 - x^2 - 10y + 5) = 0$

$2x(-x^2 - 10y + 6) = 0$ 0,5b

- $x = 0$ • $x^2 + 10y = +6$

$\Rightarrow 10 - 2y(10y - 5) = 0$ $10 - 2y(1) = 0$

$-20y^2 + 10y + 10 = 0$ $y = \cancel{-\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}}$ 5 1b

$-2y^2 + y + 1 = 0$

$-(y-1)(2y+1) = 0$ $x^2 = \cancel{-4 + \frac{50}{9} = \frac{24}{9}}$ $6 - 50 = -44$

nemá řešení 1b

$y_1 = 1$ $y_2 = -\frac{1}{2}$ 1b $x = \cancel{\pm\frac{\sqrt{24}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

Máme body $[0,1]$ $[0,-\frac{1}{2}]$ ...

$\cancel{[\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{5}{9}]}$ $\cancel{[-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{5}{9}]}$ ... vede na stejné hodnoty

Spočteme druhé derivace

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}(4x^2(x^2+10y-6)) + e^{-(x^2+y^2)}(2 - 6x^2 - 20y + 10)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}(-20x + 4xy(x^2+10y-5)) + e^{-(x^2+y^2)}(-4xy)$ 1b

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}(-20y + 4y^2(x^2+10y-5)) + e^{-(x^2+y^2)}(-2x^2-40y+10)$

Posoudíme Hessián $\times e^{(x^2+y^2)}$

$[0,1]$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix}$$ ~~lokální~~ lok. maximum ~~minimum~~

15

$[0,-\frac{1}{2}]$

$$\begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$$ lok. minim. ~~nebo~~ ~~(dny)~~ (bo)

~~$\left[\pm\frac{\sqrt{24}}{3}, -\frac{5}{9}\right]$~~

~~$\frac{32}{3}\left(\frac{8}{3}+\frac{50}{9}-6\right)+\left(2-16+20\frac{5}{9}\right)=\frac{32}{3}\left(\frac{-26-54}{9}\right)+\frac{100-149}{9}=\frac{32\cdot 80}{27}-\frac{26}{9}$~~

~~$\frac{\sqrt{24}}{3}\left(-20-\frac{20}{9}\left(\frac{8}{3}+\frac{50}{9}-5\right)+\frac{20}{9}\right)=\frac{\sqrt{24}}{3}\left(-20-\frac{20}{9}\left(\frac{74-45}{9}\right)+\frac{20}{9}\right)=\frac{\sqrt{24}}{3}\left(-20-\frac{580}{9}+\frac{20}{9}\right)$~~

~~$\frac{100}{9}+4\frac{35}{81}\left(\frac{8}{3}+\frac{50}{9}-5\right)-\frac{16}{3}+\frac{200}{9}+10\Big)\neq 0 \Rightarrow$ jde o sedlové body~~

Protože a) $\lim_{(x,y)\to(\infty)} f(x,y)=0$

b) $\exists\ [x_0,y_0],\ [x_1,y_1]:\ f(x_0,y_0)>0,\ f(x_1,y_1)<0 \Rightarrow$ fce má globální maxi / min

Tedy v bodě $[0,1]$ nabývá f globálního maxima $5e^{-1}$

$[0,-\frac{1}{2}]$ minima $-2e^{-\frac{1}{4}}$.

15

26,5.

(4) Ukažte, že předpis

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) + \ln\left(x^2+y^2-z^2\right) = 1$$

6,5

definuje na okolí bodu $(1,1,1)$ lokálně funkci $z = z(x,y)$.
Spočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

Řešení

- Dosazení $\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + \ln(1) = 1$ ✓
- Vše fce jsou na okolí $(1,1,1)$ hladké
- $\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) + \ln\left(x^2+y^2-z^2\right) - 1\right)\Big|_{(1,1,1)}$

$$= \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) + \frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot(-2z)\Big|_{(1,1,1)}$$

$$= -2 \neq 0$$

2b

$\Rightarrow$ lokálně $\exists\ z = z(x,y)$ hladká. Dále 1b

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z(x,y))\right) + \ln\left(x^2+y^2-z^2(x,y)\right) - 1\right) \quad 0{,}5$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z(x,y))\right)\cdot\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) + \frac{1}{x^2+y^2-z^2(x,y)}\cdot\left(2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1} \quad 1b$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z(x,y))\right) + \ln\left(x^2+y^2-z^2(x,y)\right)\right) \quad 0{,}5$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right)\cdot\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) + \frac{1}{x^2+y^2-z^2(x,y)}\left(2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 1} \quad 1b$$