30.5.

1 Nalezněte maximální řešení ODR

75

$$x^3 y''' + x y' - y = 6x$$

splňující

$$y(1) = 1 \qquad y'(1) = 0 \qquad y''(1) = 1$$

Řešení:

Zřejmě hledáme řešení na $(0,+\infty)$ (a uvidíme, zda půjde „projít nulou")

Zkusme hledat řešení hom. rovnice ve tvaru

$$y_H = x^\alpha \qquad 0{,}5$$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + \alpha - 1 = 0$$

$$(\alpha-1)^3 = 0 \quad \text{trojnásobný kořen } 1 \qquad 1$$

$$\Rightarrow y_H = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x \qquad 1$$

x^1 je řešení hom. rovnice $\Rightarrow$ hledáme

$$y_p = A x \ln^3 x \quad (\text{3-násobný kořen}) \qquad 0{,}5$$

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= A\ln^3 x + 3A\ln^2 x \\ y_p'' &= \frac{3A\ln^2 x}{x} + \frac{6A\ln x}{x} \\ y_p''' &= \cancel{\frac{6A\ln x}{x^2}} - \frac{3A\ln^2 x}{x^2} + \frac{6A}{x^2} - \cancel{\frac{6A\ln x}{x^2}} \end{aligned}\right\} \; 1$$

$$\Rightarrow 6Ax - \cancel{3Ax\ln^2 x} + \cancel{Ax\ln^3 x} + \cancel{3Ax\ln^2 x} - \cancel{Ax\ln^3 x} = 6x \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x + x \ln^3 x \qquad 1$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1} \qquad 0{,}5$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 \ln x + C_2 + C_3 \ln^2 x + 2C_3 \ln x + \ln^3 x + 3\ln^2 x \Big|_{x=1} = 0$$

$$1 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = -1} \qquad 0{,}5$$

$$y''(1) = 1 \Rightarrow \frac{C_2}{x} + \frac{2C_3}{x}\ln x + \frac{2C_3}{x} + \frac{3\ln^2 x}{x} + 6\ln x \Big|_{x=1} = 1$$

$$C_2 + 2C_3 = 1 \Rightarrow \boxed{C_3 = 1} \qquad 0{,}5$$

$$y(x) = x - x\ln x + x\ln^2 x + x\ln^3 x \qquad x \in (0,\infty)$$ 0,5

Alternativní řešení

Položím $x = e^s$ 0,5

$z(s) = y(x(s))$

$z' = y'\cdot x$

$z'' = y''\cdot x^2 + y'\cdot x$

$z''' = y'''\cdot x^3 + 3y''x^2 + y'\cdot x$ 1

$$z''' - 3z'' + 3z' - z = 6e^s$$ 0,5

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$ 0,5

$z_H = C_1 e^s + C_2 s e^s + C_3 s^2 e^s$ 1

$z_p = A\cdot s^3\cdot e^s$ 0,5 $\Rightarrow Ae^s\left(6 + 6s\cdot 3 + 3\cdot s^2\cdot 3 + s^3 - 3(6s + 6s^2 + s^3) + 3(3s^2 + s^3) - s^3\right) = 6e^s \Rightarrow A = 1$

$z(s) = C_1 e^s + C_2 s e^s + C_3 s^2 e^s + s^3 e^s$ 0,5

$y(x) = C_1 x + C_2 \ln x\cdot x + C_3 \ln^2 x\cdot x + \ln^3 x\cdot x$ a dále jako výše.

0,5

(10 b)

(2) (7,5) Vyš. v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady, včetně krajní konvergence. Pokud použijete nějaké kritérium (věta), napište přesně předpoklady!

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \ln(1+k^p)\, \operatorname{arctg}(1+k^2)$$

<u>Řešení:</u>

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{\ln(1+k^p)\operatorname{arctg}(1+k^2)} \qquad 1$$

a) $p \geq 0 \Rightarrow R = 1$ ✓ 1

b) $p < 0 \Rightarrow R = 1$ ✓

Tedy řada konverguje pro $|z|<1$, diverguje pro $|z|>1$. 0,5

Uvažujme nyní $|z|=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi k} \ln(1+k^p)\operatorname{arctg}(1+k^2) \qquad 0,5$$

Nechť $\varphi \neq 0, 2\pi$ (tj. $|z|=1$, ale $z \neq 1$). Pak lze použít Abelova / Dirichletova kritéria.

Je-li $p \geq 0$ – není splněna nutná podm. K $\Rightarrow$ řada nekonverguje 0,5

Je-li $p<0$ $\ln(1+k^p) \searrow 0$ 0,5, proto

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi k}\ln(1+k^p)$ K $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi k}\ln(1+k^p)\operatorname{arctg}(1+k^2)$ K

1 (Dirichlet) (Abel, 1 $\operatorname{arctg}(1+k^2) \nearrow \frac{\pi}{2}$)

Je-li $\varphi = 0$ (2π)

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+k^p)\operatorname{arctg}(1+k^2)$ 0,5

$\Rightarrow$ řada nekonverguje pro $p \geq 0$ (není splněna nutná podm. K)

Je-li $p<0$

$a_k \sim \frac{1}{k^{|p|}}$ $\Rightarrow$ řada K pro $p<-1$ (integrální) 0,5

<u>Závěr:</u>

Pro $p \geq 0$ řada K pro $|z|<1$

$-1 \leq p < 0$ řada K pro $|z|<1$ a $|z|=1$ kromě $z=1$ 0,5

$-1 > p$ řada K pro $|z| \leq 1$.

(10b.)

(1) Vyšetřete na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spojitost funkce

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{4/3} y^{4/3}}{(x^2+y^2)^{\alpha}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) spojitost
b) existenci parciálních derivací
c) existenci totálního diferenciálu
v bodě $(0,0)$.

Řešení

Zde použijeme polární souřadnice. Náme počátku f

a) $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{r^{8/3} \cos^{4/3}\varphi \sin^{4/3}\varphi}{r^{2\alpha}}$ 1

Tedy f je spojitá v počátku, pokud $8/3 > 2\alpha$

$\boxed{\alpha < \frac{4}{3}}$ 1

b) Parciální derivace:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$ 0,5

Tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ 1

c) Totální diferenciál
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) h_2}{\|(h_1,h_2)\|_2}$$ 0,5

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h_1^{4/3} h_2^{4/3}}{\|h\|^{2\alpha}} \frac{1}{\|h\|} \overset{?}{=} 0$$ 0,5

Potřebujeme $\frac{8}{3} > 1+2\alpha$ tj. $\boxed{\alpha < \frac{5}{6}}$ 1

Závěr:
f je spojitá v počátku pro $\alpha < \frac{4}{3}$, parc. derivace (nulové) existují $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, totální diferenciál (nulové zobrazení) existuje pro $\alpha < \frac{5}{6}$. 0,5

30.5

4

3,5

Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

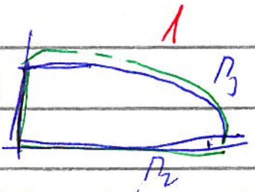
na množině

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1.$$

Nalezněte body, ve kterých se extrémy nabývají

Řešení

Vzhledem k symetrii stačí uvažovat čtvrtinu elipsy



f je spojitá $\Rightarrow$ nabývá svého maxima i minima

a) lokální extrémy uvnitř

$f(x,y) = x + y \Rightarrow$ nejsou 1

b) na hranici $x = 0$ (B_1)

$f(0,y) = y \qquad y \in [0,3]$

$\underline{f(0,0) = 0} \qquad \underline{f(0,3) = 3}$ 1

c) na hranici $y = 0$ (B_2)

$f(x,0) = x$

$f(0,0) = 0 \qquad f(0,4) = 4$ 1

c) na části elipsy (B_3)

zde použijeme Lagrangeovy multiplikátory

$$F(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$ 0,5

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\lambda x}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{2\lambda y}{9} \qquad y = \frac{9}{2\lambda}$$ 1

$$\frac{\left(\frac{8}{\lambda}\right)^2}{16} + \frac{\left(\frac{9}{2\lambda}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{5}, \quad y = \frac{9}{5}$$ 1

$f\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right) = \underline{5}$ 0,5

$\Rightarrow$ ze symetrie f nabývá svého globálního maxima v bodech $\left(\pm\frac{16}{5}; \pm\frac{9}{5}\right)$ $f(\,) = 5$ a svého globálního minima v $[0,0]$ $f(\,) = 0$.

0,5 Zdův.: 0,5