17,6 6,5

1 Nalezněte řešení úlohy

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x} \qquad y(0) = 3 \quad y'(0) = 0$$

Řešení

$y_H(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ Volíme $x \in (-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8})$ (aby $\cos 4x \neq 0$).

$\lambda^2 + 16 = 0$

$\lambda = \pm 4i$ 1b

$y_p(x)$ – není speciální pravá strana ⇒ metoda ~~...~~ variace konstant

$y_p(x) = C_1(x) \cos 4x + C_2(x) \sin 4x$ ⇒ $C_1'(x) \cos 4x + C_2'(x) \sin 4x = 0$ / $\sin 4x$

$-4 C_1'(x) \sin 4x + 4 C_2'(x) \cos 4x = \frac{16}{\cos 4x}$ / $\cos 4x$ 1b

⇒ $C_2'(x) = 4$ ⇒ $C_2(x) = 4x$

$C_1'(x) = -4 \frac{\sin 4x}{\cos 4x}$

$C_1(x) = \ln(\cos 4x)$ $x \in (-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8})$ 1,5

$y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \ln(\cos 4x) \cdot \cos 4x + 4x \sin 4x$

$y(0) = 3$ ⇒ $C_1 = 3$

$y'(0) = 0$ ⇒ $0 = 4C_2$ ⇒ $C_2 = 0$ 1b

$$\boxed{y(x) = 3\cos 4x + \ln(\cos 4x) \cdot \cos 4x + 4x \sin 4x \qquad x \in (-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8})}$$

0,5b 0,5b

1/6

2 V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné

2b řady, včetně hranice konvergence

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2^k k!}{(2k+1)!!}\right)^p z^k,$$

kde $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1$.

Řešení

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{\frac{2^{k+1}(k+1)\cancel{k!}}{(2k+3)\cdot\cancel{(2k+1)!!}}}{\frac{\cancel{2^k}\cdot\cancel{k!}}{\cancel{(2k+1)!!}}}\right)^p \to 1 \quad 1b$$

Tedy mocninná řada K pro ~~φ~~ $|z|<1$ a diverguje pro $|z|>1$. $\forall p\in\mathbb{R}$ 0,5b

Zbývá vyšetřit $|z|=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{e^{i\pi n}} \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\right)^p e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\varphi+\pi)} \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\right)^p$$

a) Je-li $\varphi+\pi \neq 2\pi$ $(\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi])$,

stačí vidět, že $\left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\right)^p \searrow 0$. ~~Protože řada K~~ 1b

Vyšetříme nyní b) $\varphi+\pi = 2\pi$ tj. $\varphi=\pi$ $(z=(-1))$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{\frac{2^n n!}{\cancel{(2n+1)!!}}}{\frac{2^{n+1}\, n!(n+1)}{(2n+3)\cancel{(2n+1)!!}}}\right)^p = \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^p$$

$$= 1+\frac{p}{2(n+1)}+\frac{c_n}{n^2} = 1+\frac{p}{2n}+\frac{\tilde{c}_n}{n^2} \quad 1b$$

Tedy řada K pro $p>2$, diverguje pro $p\le 2$. 1b

Proto vzhledem k a) $\frac{2^n n!}{(2n+1)!!} \searrow 0$ 1b, tedy pro $\varphi\neq\pi$ řada K pro $p>0$. 1b

Závěr: Řada K pro
- $|z|<1$
- $|z|=1$, $z\neq -1$ pro $p>0$ 0,5b
- $z=-1$ pro $p>2$.

17.6.

3

75

Mějme

$f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

$\quad (x,y) = (0,0)$

pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zjistěte, ~~zda~~ kdy funkce v bodě $(0,0)$

a) je spojitá

b) má parciální derivace

c) má totální diferenciál.

d) má spojité parciální derivace.

Řešení:

a) Protože ~~fce~~ $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ je omezená na okolí $(0,0)$, stačí pro spojitost, aby $(x^2+y^2)^{\alpha} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. 1b Tedy ~~f~~ funkce je spojitá pro $\alpha > 0$. 0,5b

b) Vzhledem k symetrii stačí vyšetřit derivaci dle x 0,5b

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha} \cdot \sin\frac{1}{x^2} - 0}{x}$$ 1b

Tato limita existuje (a je nulová) pro $\alpha > \frac{1}{2}$ 0,5b

Tedy parciální derivace v počátku existují pro $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Pro existenci tot. diferenciálu vzhledem k bodu b) je třeba ověřit, že

$$\lim_{\vec{h}\to \vec{0}} \frac{f(\vec{h}) - f(\vec{0})}{\|\vec{h}\|} = 0$$ 1b ($df(0,0)\vec{h} = \vec{0}\cdot\vec{h}$, pokud $\exists$).

Tedy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^{2\alpha} \sin\frac{1}{\|h\|^2}}{\|h\|} = 0$$ pro $\boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$ 0,5b

Totální diferenciál existuje v počátku pro $\alpha > \frac{1}{2}$.

d) Podobně jako v bodě b) stačí vyšetřit derivaci dle x 0,5b

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1}\, 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - (x^2+y^2)^{\alpha} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x$$ 0,5b

Zjevně je nejdůležitější druhý člen a jde k nule pro 0,5b $\alpha - 2 + \frac{1}{2} > 0$ tj. $\boxed{\alpha > \frac{3}{2}}$ 0,5b

Tedy parciální derivace jsou spojité pro $\alpha > \frac{3}{2}$.

7.6

4

1b

Naleznete maximální a minimální hodnotu fce

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 + x + 2y + 2z$$

na množině $x^2+y^2+z^2 \leq 9$.

Nalezněte body, ve kterých se tyto hodnoty nabývají (pokud ?).

Řešení

Funkce $f(x,y,z)$ je spojitá, nabývá tedy na dané omezené uzavřené množině svých extrémů. Ty mohou být buď lokálními extrémy uvnitř nebo se nabývají na hranici a pro ty musí splňovat podmínky pro Lagrangeovy multiplikátory } 1b

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z+2 \quad \Big\} \ 1b$$

$\Rightarrow$ možný lok. extrém je pouze bod $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ a jeho hodnota

$f(-\frac{1}{2},-1,-1) = \frac{1}{4} + 1 + 1 - \frac{1}{2} - 2 - 2 = -\frac{9}{4}$ 1b

$\left(g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9 \Rightarrow \text{na množině } x^2+y^2+z^2 = 9 \text{ není } \nabla g = 0 \ ! \Rightarrow \text{vše OK.} \right)$

$$\Rightarrow 2x+1-2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-\lambda + \frac{1}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$$2y+2-2\lambda y = 0 \qquad 1-\lambda+\frac{1}{y} = 0 \qquad y = 2x$$

$$2z+2-2\lambda z = 0 \qquad 1-\lambda+\frac{1}{z} = 0 \qquad z = 2x \quad \Big\} \ 1b$$

$$x^2+y^2+z^2 = 9$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+4x^2+4x^2 = 9$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad y = \pm 2, \quad z = \pm 2 \quad \Big\} \ 1b$$

$[1,2,2] \quad [-1,-2,-2]$

$f(1,2,2) = 9+1+4+4 = 18$

$f(-1,-2,-2) = 9-1-4-4 = 0$ } 1b

$M = \{(x,y,z) ; x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$

$\Rightarrow \max_M f(x,y,z) = 18$ nabývá se v bodě $[1,2,2]$

$\min_M f(x,y,z) = -\frac{9}{4}$ nabývá se v bodě $[-\frac{1}{2},-1,-1]$ 1b