

Aplikace určitého integrálu

1. Obsah oblasti omezené křivkami

- $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

- $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$, kde $y = f(x)$ je dány parametricky $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, φ, ψ spojité na $[t_1, t_2]$, φ ryze monotónní, φ' spojitá, $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b, \psi$ nezáporná na $[t_1, t_2]$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) |\varphi'(t)| dt$$

- Speciálně $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r \leq f(\theta)$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) d\theta$$

2. Objemy těles

- Rotační těleso vzniklé rotací oblasti $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$, $a \geq 0$

– kolem osy x

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

– kolem osy y

$$V = 2\pi \int_a^b (xf(x) - xg(x)) dx$$

- $y = f(x)$ popsáno parametricky viz výše, $g(x) = 0$

– kolem osy x

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt$$

– kolem osy y

$$V = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) |\varphi(t) \varphi'(t)| dt$$

- $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq r \leq f(\theta)$ kolem osy x

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin \theta \, d\theta$$

- Je-li $S(x)$ obsah průřezu, $a \leq x \leq b$

$$V = \int_a^b S(x) \, dx$$

3. Délka křivky

- Parametrický popis $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ' , ψ' spojité

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, dt$$

- speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

- $r = f(\theta)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \, d\theta$$

4. Obsah rotačních ploch

- Rotace parametricky popsané plochy (viz výše) kolem osy x

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, dt$$

- Speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

- $r = f(\theta)$, f' spojitá

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)| \sin \theta \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \, d\theta$$

5. Statické momenty, momenty setrvačnosti, těžiště

- Oblast omezená $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$, f, g spojitě, $\sigma(x)$ plošná hustota

Statické momenty vzhledem k ose x resp. y

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx \quad M_y = \int_a^b \sigma(x)x(f(x) - g(x)) dx$$

Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \quad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_a^b \sigma(x)(f(x) - g(x)) dx$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \sigma(x)(f^3(x) - g^3(x)) dx$$

$$I_y = \int_a^b \sigma(x)x^2(f(x) - g(x)) dx$$

$$I_z = I_x + I_y$$

- Hmotný oblouk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ s lineární hustotou $\mu(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, φ', ψ' spojitě

Statické momenty vzhledem k osám x, y

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \quad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x a y jsou

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

- Rotační těleso $a \leq x \leq b$, $0 \leq g(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)$ s objemovou hustotou $\gamma(x)$

Statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$M_{xy} = M_{xz} = 0 \quad M_{yz} = \pi \int_a^b \gamma(x)x(f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Těžiště

$$T = (\xi, 0, 0), \quad \xi = \frac{M_{yz}}{M} \quad M = \pi \int_a^b \gamma(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose x je

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \gamma(x)(f^4(x) - g^4(x)) dx$$