① Nalezněte vnitř. ~~bod~~ stacionární bod funkcionálu

75

$$\Phi(y) = \int_0^1 (y' + y)^2 \, dx$$

na množině $M = \{ y \in C^1([0,1]), y(0) = 0, y(1) = 1 \}$.

Identifikujte (pokud existuje) lok. minimum funkcionálu Φ na množině M.

Řešení:

Nejprve nalezneme E-L rovnici

$$L_{y,y'} = (y' + y)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Big\} 1b \quad \Rightarrow \quad 2(y'+y) - \frac{d}{dx}(2(y'+y)) = 0$$

$$y'' - y = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad y(1) = 0 \quad \Big\} 1b$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad 0{,}5b$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$y(1) = 1 \Rightarrow C_1 \left(e \cancel{+} \frac{1}{e}\right) = 1$

$$C_1 \frac{e^2 \cancel{+} 1}{e} = 1$$

$$C_1 = \frac{e}{e^2 - 1} \qquad C_2 = \cancel{+} \frac{-e}{e^2 - 1}$$

$$\underline{y(x) = \frac{e}{e^2-1} e^x - \frac{e}{e^2-1} e^{-x}} \qquad 1b$$

Jediný stac. bod, ukážeme, že jde o minimum:

$P(x) = L_{zz}(x, y_0, y_0') = 2 > 0$ OK. 1b

$Q(x) = L_{yy}(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx} L_{yz}(x, y_0, y_0') = 2 - \frac{d}{dx} \cdot 2 = 2$ 0,5b

Jacobiho rovnice

$$-(2h')' + 2h = 0$$

$$h'' - h = 0 \quad \Big\} 0{,}5b$$

$h(0) = 0 \quad h(x) = 0 \quad ..$ konj. bod $\quad x \in (0,1]$

$$h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$h(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$

$h(x_0) = 0 \quad C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0} = 0$

$\Big\}$ jediné řešení je $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ 1b

0,5b

$\Rightarrow$ neexistuje konj. bod v $(0,1]$ $\Rightarrow$ $y(x)$ nalezené výše je bodem lok. minima

(2) V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vyšetřete bodovou / stejnoměrnou / lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

(6b) (+2b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^{\alpha} \ln^{\beta}(1+k)}$$

na intervalu $[0, 2\pi)$ resp. $(0, 2\pi)$.

Pozn: Pokud zjistíte-li někde, že stejnoměrná konvergence skutečně nenastává pro žádnou hodnotu parametrů pro kterou je řada bodově, ale alespoň lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Řešení

(i) Bodová konvergence na $(0, 2\pi)$

plyne z toho, že $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ je omezená posloupnost. Pak dle Dirichletova kritéria stačí, aby $\frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta}(1+k)} \searrow 0$, což nastává pro: $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha = 0, \beta > 0$. 1,5b

(ii) Bodová konvergence v 0 (2π)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta}(1+k)} \qquad \alpha > 1,\ \beta \in \mathbb{R}; \quad \alpha = 1,\ \beta > 1$$

} z integrálního kritéria na srovnání ($\ln(1+k) \approx \ln k$, $k \to \infty$) 1,5b

Stejnoměrná konvergence na $[0, 2\pi]$ – viz bodová konvergence v $[0, 2\pi)$ (plyne z Weierstrassova kritéria $|\cos(kx)| \leq 1$) } 1b

na $(0, 2\pi)$ stejně jako výše } 0,5b

(+2b) { Pokud je řada konvergentní stejnoměrně na $(0, 2\pi)$ pro jiné hodnoty parametrů, pak bychom B-C podmínku vyšetřili pro $\cos(kx)$ blízko nuly, a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta}(1+k)}$ splňuje B-C podmínku → konverguje → spor }

Lokálně stejnoměrná konvergence na $(0, 2\pi)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)$ je stejnoměrně omezená částečnými součty na $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$

a $\frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta}(1+k)} \searrow 0$ stejnoměrně vůči x pro $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ či $\alpha = 0, \beta > 0$. } 1b

Závěr Řada konverguje ~~stejnoměrně~~ bodově:

$[0,2\pi]$ $\alpha>1$ $\beta\in\mathbb{R}$ či $\alpha=1$, $\beta>1$

$(0,2\pi)$ $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ či $\alpha=0$, $\beta>0$.

stejnoměrně

$[0,2\pi]$ $\alpha>1$, $\beta\in\mathbb{R}$ či $\alpha=1$, $\beta>1$

$(0,2\pi)$ totéž

lokálně stejnoměrně

$(0,2\pi)$ $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ či $\alpha=0$, $\beta>0$.

0,3

(3) Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje integrál

(8b)

$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} \sinh(ax^2)}{x^2} \, dx \ ?$$

Pro tyto hodnoty integrál spočítejte derivací dle parametru. Nezapomeňte ověřit všechny ~~st~~ předpoklady příslušných vět!

Řešení

Integrál zřejmě konverguje pro $|a|<1$ (pod exponenciálním členem v ∞), a ~~Ne~~ v 0 kde nic je funkce omezená.

1,5b ~~2b~~

Jeli $a = 1$

$$\frac{e^{-x^2} \sinh x^2}{x^2} \sim 1 \qquad x \sim 0$$

$$\frac{e^{-x^2}(e^{x^2} - e^{-x^2})}{2 \ x^2} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2x^2}}{x^2}\right) \quad x \to +\infty \implies \text{chová se jako } \frac{1}{2x^2}, \text{ konverguje integrál}$$

$\implies$ ($a=-1$ je lichá) integrál konverguje pro $a \in [-1,1]$.

2b

Výpočet: Chceme derivovat dle a

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-x^2} \sinh(ax^2)}{x^2}\right) = e^{-x^2} \cosh(ax^2) \quad - \ \exists \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall a \in \mathbb{R}$$

- měř. v x

$\int_0^\infty$ ~~φ~~ $\varphi(0) = 0$

Int. majoranta pro $|a| \leq a_0 < 1 \implies |e^{-x^2} \cosh(ax^2)| \leq e^{-x^2}\cosh(a_0 x^2)$ a chová se v ∞ jako $e^{-\varepsilon x^2} \implies$ konverguje.

Tedy pro $a \in (-1,1)$ lze derivovat a máme 0,5b

$$\varphi'(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cosh(ax^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-x^2(1+a)} + e^{-x^2(1-a)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right) \quad 1b$$

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right) + C \qquad \varphi(0) = 0 \implies C = 0$$

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right)$$

1b

Víme $\lim_{a\to\pm 1^{\mp}} \varphi(a)$ existuje. Je třeba ověřit, že $\varphi(a)$ je spojitá na $[0,1]$.

1,5 Funkce $\dfrac{e^{-x^2}\sinh(ax^2)}{x^2}$ je spojitá v a, měř. v x (nulová je spojitá)

majorantou je $\left|\dfrac{e^{-x^2}\sinh(ax^2)}{x^2}\right| \leq \dfrac{e^{-x^2}\sinh x^2}{x^2}$ což je integrovatelná fce (viz výše)

$\Rightarrow$ $\varphi(a)$ je spojitá na $[-1,1]$ $\Rightarrow$ vztah platí i pro $a \in [-1,1]$.

0,5

(4) Naleznite obsah oblasti ohraničené křivkou

(6b) $$(x^4+y^4)^{\frac{5}{9}} = xy.$$

~~Ře~~ Řešení

0,5b Vidíme v 1. a 4. kvadrantu jsou křivky symetrické (dosaď je stejné), v 2. a 3. kvadrantu křivka není.

Soustředíme se na 1. kvadrant

0,5b
$$I = \iint_M 1 \, dx$$

$$M = \{ x,y \in \mathbb{R}^2 : (x^4+y^4)^{\frac{5}{9}} \le xy \}$$

V zobecněných polárních souřadnicích
$$x = r\cos^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad y = r\sin^{\frac{1}{2}}\varphi$$ 0,5b

$$\Rightarrow \quad r^{\frac{20}{9}} \le r^2 \cos^{\frac{1}{2}}\varphi \sin^{\frac{1}{2}}\varphi \qquad \varphi \in (0,\tfrac{\pi}{2})$$
$$r \le \cos^{\frac{9}{4}}\varphi \sin^{\frac{9}{4}}\varphi$$ 0,5b

$$J = \left|\det\begin{pmatrix} \cos^{\frac{1}{2}}\varphi & -\frac{1}{2} r \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi \sin\varphi \\ \sin^{\frac{1}{2}}\varphi & \frac{1}{2} r \sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}\right|$$
$$= \left| \tfrac{1}{2} r \left(\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos^{\frac{3}{2}}\varphi + \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi \sin^{\frac{3}{2}}\varphi\right)\right|$$
$$= \tfrac{1}{2} r \sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi$$ 0,5b

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos^{\frac{9}{4}}\varphi \sin^{\frac{9}{4}}\varphi} \tfrac{1}{2} r \sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi \, d\varphi$$ 0,5b $$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}\varphi \sin^{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}\varphi \, d\varphi$$ 0,5b

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{16\cdot 4}\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 2\varphi\right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{16\cdot 4}\int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\cos^2(2\varphi) + \cos^4(2\varphi)\right) d\varphi = \frac{1}{16\cdot 4}\int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\,\frac{1+\cos(4\varphi)}{2} + \left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)^2\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\cdot 64}\int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{64\cdot 4}\int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\, d\varphi = \frac{3\pi}{1024}$$

2b

$$S = 2I = \frac{3\pi}{512}$$ (4 kvadrant). 0,5b