Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 29.9.2022

13 Posloupnosti a řady funkcí
13.1 Bodová a stejnoměrná konvergence I

Definice (1 Bodová a stejnoměrná konvergence D 14.1.1 a 14.1.3)

(i) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } x \in \Omega.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω.
Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí stejnoměrné konvergence jejích částečných součtů.

(ii) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje bodově* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \Omega$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \to \varphi$ na Ω.
Bodovou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí bodové konvergence jejích částečných součtů.

13 Posloupnosti a řady funkcí

13.1 Bodová a stejnoměrná konvergence I

Definice (1 Bodová a stejnoměrná konvergence D 14.1.1 a 14.1.3)

(i) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } x \in \Omega.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω.
Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí stejnoměrné konvergence jejích částečných součtů.
(ii) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje bodově* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \Omega$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \to \varphi$ na Ω.
Bodovou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí bodové konvergence jejích částečných součtů.

Věta (1 Charakterizace stejnoměrné konvergence T 14.1.6)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω. Pak

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|\right) = 0.$$

,

Definice (2 Lokálně stejnoměrná konvergence I Pozn. 14.1.10)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $K \subset \Omega$, K omezená a uzavřená, platí

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \qquad \text{na } K.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \varphi$ na Ω.

13.1 Bodová a stejnoměrná konvergence II

Věta (1 Charakterizace stejnoměrné konvergence T 14.1.6)

Nechť $\{\varphi_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}^N$ *do* $\mathbb{R}$ *definovaných na* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *a* $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je definovaná na* Ω*. Pak*

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|\right) = 0.$$

,

Definice (2 Lokálně stejnoměrná konvergence I Pozn. 14.1.10)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $K \subset \Omega$, K omezená a uzavřená, platí

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \qquad \text{na } K.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \varphi$ na Ω.

Definice (2' Lokálně stejnoměrná konvergence II D 14.1.9)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $x_0 \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

Lemma (1 Ekvivalence definicí Pozn. 14.1.10)

Nechť Ω je otevřená. Potom obě předchozí definice jsou ekvivalentní.

Definice (2' Lokálně stejnoměrná konvergence II D 14.1.9)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $x_0 \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

Lemma (1 Ekvivalence definicí Pozn. 14.1.10)

Nechť Ω je otevřená. Potom obě předchozí definice jsou ekvivalentní.

Věta (2 B–C podmínka pro stejnoměrnou konvergenci V 14.1.12)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Pak posloupnost $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně na Ω právě tehdy, když je splněna Bolzano–Cauchyova podmínka

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty) \, \forall p \in \mathbb{N} \, \forall x \in \Omega \qquad |\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Věta (3 Nutná podmínka stejnoměrné konvergence V 14.2.1)

Nechť $\{\varphi_k\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}^N$ *do* $\mathbb{R}$ *definovaných na* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *stejnoměrně konverguje na* Ω, *pak* $\varphi_k \rightrightarrows 0$ *na* Ω.

Věta (4 Weierstrassovo kritérium V 14.2.2)

Nechť $\{\varphi_k\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}^N$ *do* $\mathbb{R}$ *a* $\{w_k\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}^N$ *do* $\mathbb{R}_0^+$ *definovaných na* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ *konverguje stejnoměrně na* Ω *a nechť*

$$|\varphi_k(x)| \leq w_k(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega \text{ a } k \in \mathbb{N}.$$

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$ *konvergují stejnoměrně na* Ω *a na* Ω *platí*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Věta (3 Nutná podmínka stejnoměrné konvergence V 14.2.1)

Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ stejnoměrně konverguje na Ω, pak $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na Ω.

Věta (4 Weierstrassovo kritérium V 14.2.2)

Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ a $\{w_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}_0^+$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ konverguje stejnoměrně na Ω a nechť

$$|\varphi_k(x)| \leq w_k(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega \text{ a } k \in \mathbb{N}.$$

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$ konvergují stejnoměrně na Ω a na Ω platí

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} w_k .$$