Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 27.10.2022

Měřitelné funkce I

Definice (10 Měřitelná funkce D 15.4.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je $\mathcal{M}$-měřitelná (neboli $\Omega \in \mathcal{M}$) a $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ je definovaná skoro všude na Ω. Řekneme, že f je $\mathcal{M}$-*měřitelná* na Ω, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in \Omega \colon f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}.$$

Komplexní funkce je měřitelná, je-li měřitelná její reálná i imaginární část.

Definice (11 Borelovská a lebesgueovsky měřitelná funkce D 15.4.1)

V případě měřitelných funkcí vůči borelovským množinám na $\mathbb{R}^N$ hovoříme o *borelovských funkcích*. V případě měřitelných funkcí vůči lebesgueovsky měřitelným množinám na $\mathbb{R}^N$ (tedy zúplněné σ-algebře borelovských množin) hovoříme o *lebesgueovsky měřitelných funkcích*.

Měřitelné funkce I

Definice (10 Měřitelná funkce D 15.4.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je $\mathcal{M}$-měřitelná (neboli $\Omega \in \mathcal{M}$) a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ je definovaná skoro všude na Ω. Řekneme, že f je *$\mathcal{M}$-měřitelná* na Ω, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}.$$

Komplexní funkce je měřitelná, je-li měřitelná její reálná i imaginární část.

Definice (11 Borelovská a lebesgueovsky měřitelná funkce D 15.4.1)

V případě měřitelných funkcí vůči borelovským množinám na $\mathbb{R}^N$ hovoříme o *borelovských funkcích*. V případě měřitelných funkcí vůči lebesgueovsky měřitelným množinám na $\mathbb{R}^N$ (tedy zúplněné σ-algebře borelovských množin) hovoříme o *lebesgueovsky měřitelných funkcích*.

Měřitelné funkce II

Věta (12 Vlastnosti měřitelných funkcí T 15.4.3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f\colon X \to \mathbb{R}^*$.
(i) *Je-li* f *měřitelná na měřitelné množině* $\Omega \subset X$, *pak je* f *měřitelná také na každé její měřitelné podmnožině.*
(ii) *Je-li* f *měřitelná na měřitelných množinách* $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, *pak je* f *měřitelná také na* $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Věta (13 Charakterizace měřitelných funkcí pomocí úrovňových množin V 15.4.5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ *je definovaná všude na* X. *Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*
(i) f *je měřitelná*
(ii) *množina* $\{x \in X\colon f(x) \geq \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$
(iii) *množina* $\{x \in X\colon f(x) < \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$
(iv) *množina* $\{x \in X\colon f(x) \leq \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Měřitelné funkce II

Věta (12 Vlastnosti měřitelných funkcí T 15.4.3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f : X \to \mathbb{R}^*$.
(i) *Je-li* f *měřitelná na měřitelné množině* $\Omega \subset X$, *pak je* f *měřitelná také na každé její měřitelné podmnožině.*
(ii) *Je-li* f *měřitelná na měřitelných množinách* $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, *pak je* f *měřitelná také na* $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Věta (13 Charakterizace měřitelných funkcí pomocí úrovňových množin V 15.4.5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *je definovaná všude na* X.
Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.
(i) f *je měřitelná*
(ii) *množina* $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$
(iii) *množina* $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$
(iv) *množina* $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Měřitelné funkce III

Definice (12 Ekvivalentní funkce V 15.4.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou definované všude na X. Řekneme, že f a g jsou *ekvivalentní*, jestliže $f = g$ skoro všude na X.

Věta (14 O měřitelnosti ekvivalentních funkcí V 15.4.8)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou ekvivalentní a definované všude na X. Pak jsou buď obě tyto funkce měřitelné, nebo jsou obě neměřitelné.

Věta (15 O měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí V 15.4.10)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou měřitelné funkce na X. Pak funkce $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné na X. Speciálně pokud skoro všude na X existuje bodová limita posloupnosti $\{f_n\}$, pak je měřitelná.

Měřitelné funkce III

Definice (12 Ekvivalentní funkce V 15.4.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou definované všude na X. Řekneme, že f a g jsou *ekvivalentní*, jestliže $f = g$ skoro všude na X.

Věta (14 O měřitelnosti ekvivalentních funkcí V 15.4.8)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou ekvivalentní a definované všude na X. Pak jsou buď obě tyto funkce měřitelné, nebo jsou obě neměřitelné.

Věta (15 O měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí V 15.4.10)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou měřitelné funkce na X. Pak funkce $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné na X. Speciálně pokud skoro všude na X existuje bodová limita posloupnosti $\{f_n\}$, pak je měřitelná.

Měřitelné funkce III

Definice (12 Ekvivalentní funkce V 15.4.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou definované všude na X. Řekneme, že f a g jsou *ekvivalentní*, jestliže $f = g$ skoro všude na X.

Věta (14 O měřitelnosti ekvivalentních funkcí V 15.4.8)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou ekvivalentní a definované všude na X. Pak jsou buď obě tyto funkce měřitelné, nebo jsou obě neměřitelné.

Věta (15 O měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí V 15.4.10)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou měřitelné funkce na X. Pak funkce $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné na X. Speciálně pokud skoro všude na X existuje bodová limita posloupnosti $\{f_n\}$, pak je měřitelná.

Měřitelné funkce IV

Věta (16 O měřitelnosti složené funkce V 15.4.11)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ *jsou měřitelné funkce na* X *a* $F \in C(\mathbb{R}^2)$*. Pak funkce* $x \mapsto F(f(x), g(x))$ *je měřitelná na* X*. Speciálně, funkce* $f \pm g$ *a* fg *jsou měřitelné na* X*.*

Věta (17 O lebesgueovské měřitelnosti spojité funkce V 15.4.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je lebesgueovsky měřitelná a* $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* Ω *vzhledem k* Ω*. Pak je* f *lebesgueovsky měřitelná na* Ω*. Dokonce, je-li* f *spojitá pouze na* $\Omega \setminus P$*, kde* $\lambda_N(P) = 0$*, pak je* f *lebesgueovsky měřitelná na* Ω*.*

Důsledek (4 O lebesgueovské měřitelnosti funkce spojité až na množinu míry nula)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je lebesgueovsky měřitelná a* $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $\Omega \setminus P$*, přičemž* $\lambda_N(P) = 0$*. Potom je* f *lebesgueovsky měřitelná na* Ω*.*

Věta (16 O měřitelnosti složené funkce V 15.4.11)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce na X a $F \in C(\mathbb{R}^2)$. Pak funkce $x \mapsto F(f(x), g(x))$ je měřitelná na X. Speciálně, funkce $f \pm g$ a fg jsou měřitelné na X.

Věta (17 O lebesgueovské měřitelnosti spojité funkce V 15.4.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na Ω vzhledem k Ω. Pak je f lebesgueovsky měřitelná na Ω. Dokonce, je-li f spojitá pouze na $\Omega \setminus P$, kde $\lambda_N(P) = 0$, pak je f lebesgueovsky měřitelná na Ω.

Důsledek (4 O lebesgueovské měřitelnosti funkce spojité až na množinu míry nula)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\Omega \setminus P$, přičemž $\lambda_N(P) = 0$. Potom je f lebesgueovsky měřitelná na Ω.

Měřitelné funkce IV

Věta (16 O měřitelnosti složené funkce V 15.4.11)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce na X a $F \in C(\mathbb{R}^2)$. Pak funkce $x \mapsto F(f(x), g(x))$ je měřitelná na X. Speciálně, funkce $f \pm g$ a fg jsou měřitelné na X.

Věta (17 O lebesgueovské měřitelnosti spojité funkce V 15.4.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná a $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na Ω vzhledem k Ω. Pak je f lebesgueovsky měřitelná na Ω. Dokonce, je-li f spojitá pouze na $\Omega \setminus P$, kde $\lambda_N(P) = 0$, pak je f lebesgueovsky měřitelná na Ω.

Důsledek (4 O lebesgueovské měřitelnosti funkce spojité až na množinu míry nula)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná a $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\Omega \setminus P$, přičemž $\lambda_N(P) = 0$. Potom je f lebesgueovsky měřitelná na Ω.

Definice (13 Jednoduchá funkce D 15.5.1)

Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta (18 O aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi V 15.5.4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na X taková, že $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$, $s_n < \infty$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s_n \to f$ na X.

Věta (19 O aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi V 15.5.6)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existují měřitelná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^N$ takové, že $\lambda_N(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$.

14.5 Jednoduché funkce I

Definice (13 Jednoduchá funkce D 15.5.1)

Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta (18 O aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi V 15.5.4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na X taková, že $0 \le s_n \le s_{n+1} \le f$, $s_n < \infty$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s_n \to f$ na X.

Věta (19 O aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi V 15.5.6)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existují měřitelná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^N$ takové, že $\lambda_N(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$.

14.5 Jednoduché funkce I

Definice (13 Jednoduchá funkce D 15.5.1)

Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta (18 O aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi V 15.5.4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na X taková, že $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$, $s_n < \infty$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s_n \to f$ na X.

Věta (19 O aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi V 15.5.6)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existují měřitelná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^N$ takové, že $\lambda_N(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$.

Věta (20 Jegorovova věta V 15.5.8)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a platí $\mu(X) < \infty$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí z X do $\mathbb{R}^*$, které jsou skoro všude konečné a konvergují skoro všude na X. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje měřitelná množina $E \subset X$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $\{f_n\}$ konvergují stejnoměrně na $X \setminus E$.

Věta (21 Luzinova věta V 15.5.9)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovky měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^N$ taková, že $\lambda_N(G) < \varepsilon$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^N \setminus G$ vzhledem k $\mathbb{R}^N \setminus G$.

14.5 Jednoduché funkce II

Věta (20 Jegorovova věta V 15.5.8)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a platí* $\mu(X) < \infty$*. Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných funkcí z* X *do* $\mathbb{R}^*$*, které jsou skoro všude konečné a konvergují skoro všude na* X*. Nechť* $\varepsilon > 0$*. Pak existuje měřitelná množina* $E \subset X$ *taková, že* $\mu(E) < \varepsilon$ *a* $\{f_n\}$ *konvergují stejnoměrně na* $X \setminus E$*.*

Věta (21 Luzinova věta V 15.5.9)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je lebesgueovky měřitelná a* $\varepsilon > 0$*. Pak existuje otevřená množina* $G \subset \mathbb{R}^N$ *taková, že* $\lambda_N(G) < \varepsilon$ *a* f *je spojitá na* $\mathbb{R}^N \setminus G$ *vzhledem k* $\mathbb{R}^N \setminus G$*.*

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce I

Definice (14 Integrál z jednoduché nezáporné funkce)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ nezávisí na tvaru rozkladu s.

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a s je JNMF. Potom

(i) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \geq 0$

(ii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když $s = 0$ s.v. na Ω*

(iii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování s na $X \setminus \Omega$ a na množinách míry nula*

(iv) *je-li $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu < \infty$, potom $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$.*

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce I

Definice (14 Integrál z jednoduché nezáporné funkce)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu$ nezávisí na tvaru rozkladu s.

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a s je JNMF. Potom
(i) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \geq 0$
(ii) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když* $s = 0$ *s.v. na* Ω
(iii) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování* s *na* $X \setminus \Omega$ *a na množinách míry nula*
(iv) *je-li* $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu < \infty$, *potom* $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$.

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce I

Definice (14 Integrál z jednoduché nezáporné funkce)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ nezávisí na tvaru rozkladu s.

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a s je JNMF. Potom
(i) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \geq 0$
(ii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když $s = 0$ s.v. na Ω*
(iii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování s na $X \setminus \Omega$ a na množinách míry nula*
(iv) *je-li $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu < \infty$, potom $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$.*

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce II

Lemma (3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF. Potom*

(i) *je-li* $s_1 = s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$

(ii) *je-li* $s_1 \leq s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma (4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF a* $c \geq 0$*. Potom*

(i) $\int_\Omega (s_1 + s_2) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$

(ii) $\int_\Omega c s_1 \,\mathrm{d}\mu = c \int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma (3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1*,* s_2 *jsou JNMF. Potom*
(i) *je-li* $s_1 = s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$
(ii) *je-li* $s_1 \leq s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$*.*

Lemma (4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1*,* s_2 *jsou JNMF a* $c \geq 0$*. Potom*
(i) $\int_\Omega (s_1 + s_2) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$
(ii) $\int_\Omega c s_1 \,\mathrm{d}\mu = c \int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu$*.*

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce III

Lemma (5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a s je JNMF. Nechť $P \in \mathcal{M}$, $P \subset \Omega$. Potom

$$\int_P s \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a s je JNMF. Potom množinová funkce

$$\varphi(A) := \int_A s \,\mathrm{d}\mu, \qquad A \subset X, \ A \in \mathcal{M}$$

je míra na σ-algebře $\mathcal{M}$.

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce III

Lemma (5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a s je JNMF. Nechť $P \in \mathcal{M}$, $P \subset \Omega$. Potom

$$\int_P s \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a s je JNMF. Potom množinová funkce

$$\varphi(A) := \int_A s \, \mathrm{d}\mu, \qquad A \subset X, \; A \in \mathcal{M}$$

je míra na σ-algebře $\mathcal{M}$.