Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 10.11.2022

Opakování I

Věta (37 Lebesgueova věta o majorizované konvergenci V 15.18.21)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X, platí $f_n \to f$ skoro všude na X a existuje $g \in \mathcal{L}(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta (40 O spojitosti integrálu závislého na parametru V 15.10.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod množiny A. Nechť funkce $f : X \times A \to \mathbb{R}$ splňuje

(i) $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in A$

(ii) *pro skoro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá v bodě α_0*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}(\mu)$ taková, že*

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ leží v $\mathcal{L}(\mu)$ pro všechna $\alpha \in A$ a funkce

$$\alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

je spojitá v α_0.

Opakování I

Věta (37 Lebesgueova věta o majorizované konvergenci V 15.18.21)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X*, platí* $f_n \to f$ *skoro všude na* X *a existuje* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *taková, že* $|f_n| \leq g$ *skoro všude na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (40 O spojitosti integrálu závislého na parametru V 15.10.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $A \subset \mathbb{R}$ *a* $\alpha_0 \in A$ *je vnitřní bod množiny* A*. Nechť funkce* $f : X \times A \to \mathbb{R}$ *splňuje*

(i) $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in A$

(ii) *pro skoro všechna* $x \in X$ *je funkce* $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ *spojitá v bodě* α_0

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *taková, že*

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ *leží v* $\mathcal{L}(\mu)$ *pro všechna* $\alpha \in A$ *a funkce*

$$\alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

je spojitá v α_0*.*

Věta (41 O limitě integrálu závislého na parametru V 15.10.2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $A \subset \mathbb{R}$ *a* $\alpha_0 \in A$ *je vnitřní bod množiny* A*. Nechť funkce* $f : X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \to \mathbb{R}$ *splňuje*

(i) $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$

(ii) *pro skoro všechna* $x \in X$ *existují vlastní limity* $F(x) := \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha)$

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *taková, že*

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ *leží v* $\mathcal{L}(\mu)$ *pro všechna* $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$*,* $F \in \mathcal{L}(\mu)$*, existuje limita* $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_X f(x, \alpha) \mathrm{d}\mu(x)$ *a platí pro ni*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_X f(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X F(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

14.10 Integrály závislé na parametru II

Věta (42 O derivaci integrálu podle parametru V 15.10.3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $A \subset \mathbb{R}$ *je otevřený interval. Nechť funkce* $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ *splňuje*

(i) $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in A$

(ii) *pro skoro všechna* $x \in X$ *a všechna* $\alpha \in A$ *existují (vlastní)* $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *taková, že*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A$$

(iv) *existuje* $\alpha_0 \in A$ *takové, že funkce* $x \mapsto f(x, \alpha_0)$ *leží v* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ *leží v* $\mathcal{L}(\mu)$ *pro všechna* $\alpha \in A$*, funkce* $\varphi\colon \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x)$ *má na* A *vlastní derivaci a platí pro ni*

$$\varphi'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Věta (43 O derivaci integrálu podle parametru II)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $A \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřený interval. Nechť funkce* $f \colon X \times A \to \mathbb{R}$ *splňuje*
(i) $f(x, \alpha) \in \mathcal{L}(\mu)$ *pro všechna* $\alpha \in A$
(ii) *pro skoro všechna* $x \in X$ *a všechna* $\alpha \in A$ *existují (vlastní)* $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x, \alpha)$ *pro jisté pevné* $j \in \{1, 2, \dots, m\}$
(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *taková, že*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x, \alpha) \right| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A$$

Pak funkce $\varphi \colon \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(x)$ *má na* A *parciální derivaci podle* α_j *a platí pro ni*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j}(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

14.11 Eulerovy Γ a B funkce I

Definice (18 Γ-funkce a B-funkce D 15.10.9)

Eulerova Γ-funkce je definována předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } s > 0.$$

Eulerova B-funkce je definována předpisem

$$B(p,q) = \int_0^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } p,q > 0.$$

Lemma (9 Základní vlastnosti Γ-funkce T 15.10.10)

(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ *kdykoliv* $s > 0$
(ii) $\Gamma(1) = 1$ *a* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *a* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{4^n n!}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iv) $\Gamma \in C^{\infty}((0,\infty))$
(v) Γ*-funkce je ryze konvexní na* $(0,\infty)$
(vi) $\lim_{s\to 0_+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = \infty$
(vii) $\lim_{s\to 0_+} s\Gamma(s) = 1.$

14.11 Eulerovy Γ a B funkce I

Definice (18 Γ-funkce a B-funkce D 15.10.9)

Eulerova Γ-funkce je definována předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } s > 0.$$

Eulerova B-funkce je definována předpisem

$$B(p,q) = \int_0^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } p, q > 0.$$

Lemma (9 Základní vlastnosti Γ-funkce T 15.10.10)

(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ *kdykoliv* $s > 0$
(ii) $\Gamma(1) = 1$ *a* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *a* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{4^n n!}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iv) $\Gamma \in C^{\infty}((0,\infty))$
(v) Γ-*funkce je ryze konvexní na* $(0,\infty)$
(vi) $\lim_{s\to 0_+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = \infty$
(vii) $\lim_{s\to 0_+} s\Gamma(s) = 1.$

14.11 Eulerovy Γ a B funkce II

Lemma (10 Vztah mezi Γ a B funkcí)

B funkce je hladká na $(\mathbb{R}^+)^2$ a splňuje

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Definice (19 Řezy množinami D 15.11.1)

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^p$ definujeme množinu

$$M^x := \{y \in \mathbb{R}^q \colon (x, y) \in M\}$$

a nazýváme ji *(svislý) řez množinou M v bodě x*. Analogicky pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ definujeme *(vodorovný) řez množinou M v bodě y* jako

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^p \colon (x, y) \in M\}.$$

14.12 Fubiniho věta II

Věta (44 Fubiniho věta V 15.11.2)

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ *je lebesgueovsky měřitelná množina a* $f \in \mathcal{L}^*(M)$. *Pak pro skoro všechna* $x \in \mathbb{R}^p$ *existuje*

$$\int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y),$$

pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ *existuje*

$$\int_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)$$

a platí

$$\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q}\int_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)\,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

14.13 Věta o substituci

Věta (45 Věta o substituci V 15.12.1)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\varphi \in C^1(G; \mathbb{R}^N)$ *je prosté zobrazení. Pak pro libovolnou lebesgueovsky měřitelnou funkci* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *definovanou na* $\varphi(G)$ *platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(y)\, \mathrm{d}\lambda_N(y) = \int_G f(\varphi(x)) |\mathrm{J}_{\varphi}(x)|\, \mathrm{d}\lambda_N(x),$$

má-li alespoň jeden z integrálů smysl.