Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 22.11.2022

15 Lebesgueovy prostory
15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P) = 0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

15 Lebesgueovy prostory
15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P) = 0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x \le \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Lemma (3 Minkowského nerovnost V 16.2.4)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f, g \in L^p(\Omega)$, pak $f + g \in L^p(\Omega)$ a

$$\mathcal{N}_p(f + g) \le \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Lemma (3 Minkowského nerovnost V 16.2.4)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f, g \in L^p(\Omega)$, pak $f + g \in L^p(\Omega)$ a

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Lemma (3 Minkowského nerovnost V 16.2.4)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f, g \in L^p(\Omega)$, pak $f + g \in L^p(\Omega)$ a

$$\mathcal{N}_p(f + g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Věta (1 Lebesgueovy prostory jsou lineární normované)

Vektorový prostor $L^p(\Omega)$, kde Ω je měřitelná, jsou normované lineární prostory, přičemž

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \mathcal{N}_p(f), \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

jsou normy na těchto prostorech.

Věta (2 Prostor L^2)

Prostor $L^2(\Omega)$ je prostorem unitárním, přičemž

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}x.$$

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů III

Věta (1 Lebesgueovy prostory jsou lineární normované)

Vektorový prostor $L^p(\Omega)$, kde Ω je měřitelná, jsou normované lineární prostory, přičemž

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \mathcal{N}_p(f), \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

jsou normy na těchto prostorech.

Věta (2 Prostor L^2)

Prostor $L^2(\Omega)$ je prostorem unitárním, přičemž

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}x.$$

Tvrzení (1 O vnoření Lebesgueových prostorů na množině konečné míry T 16.2.6)

Nechť $1 \le r \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná a* $\lambda_N(\Omega) < \infty$. *Jestliže* $f \in L^p(\Omega)$, *pak* $f \in L^r(\Omega)$.

Tvrzení (2 O interpolační nerovnosti T 16.2.9)

Nechť $1 \le p \le r \le q \le \infty$ *a* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná. Jestliže* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *pak* $f \in L^r(\Omega)$. *Dokonce platí*

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta},$$

kde $\theta \in [0,1]$ *splňuje*

$$\theta \begin{cases} = \frac{q}{r}\frac{r-p}{q-p} & \text{pro } p < q < \infty \\ = \frac{r-p}{r} & \text{pro } p < q = \infty \\ \text{je libovolné} & \text{pro } p = q. \end{cases}$$

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů IV

Tvrzení (1 O vnoření Lebesgueových prostorů na množině konečné míry T 16.2.6)

Nechť $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná a* $\lambda_N(\Omega) < \infty$. *Jestliže* $f \in L^p(\Omega)$, *pak* $f \in L^r(\Omega)$.

Tvrzení (2 O interpolační nerovnosti T 16.2.9)

Nechť $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ *a* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná. Jestliže* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *pak* $f \in L^r(\Omega)$. *Dokonce platí*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta},$$

kde $\theta \in [0,1]$ *splňuje*

$$\theta \begin{cases} = \frac{q}{r}\frac{r-p}{q-p} & \text{pro } p < q < \infty \\ = \frac{r-p}{r} & \text{pro } p < q = \infty \\ \text{je libovolné} & \text{pro } p = q. \end{cases}$$

Tvrzení (3 Obecná verze Hölderovy nerovnosti Cvic 16.2.15)

Nechť Ω *je měřitelná,* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *a nechť* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$. *Potom* $\prod_{i=1}^{n} f_i \in L^1(\Omega)$ *a platí*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}.$$

Tvrzení (4 O spojitosti normy vzhledem k exponentu T 16.2.8)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *splňuje* $\lambda_N(\Omega) < \infty$ *a* $p \in (1, \infty]$. *Jestliže* $f \in L^p(\Omega)$, *pak pro všechna* $r \in [1, p)$ *platí* $f \in L^r(\Omega)$ *a* $\|f\|_r \leq C(\lambda_N(\Omega))\|f\|_p$ *(C nezávisí na r). Naopak, jestliže* $f \in L^r(\Omega)$ *pro všechna* $r \in [1, p)$ *a existuje* $C > 0$ *takové, že* $\|f\|_r \leq C$ *pro všechna* $r \in [1, p)$, *pak* $f \in L^p(\Omega)$ *a* $\|f\|_p \leq C$ *(tatáž konstanta).*

Tvrzení (3 Obecná verze Hölderovy nerovnosti Cvic 16.2.15)

Nechť Ω je měřitelná, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a nechť $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Potom $\prod_{i=1}^n f_i \in L^1(\Omega)$ a platí

$$\Big\| \prod_{i=1}^n f_i \Big\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Tvrzení (4 O spojitosti normy vzhledem k exponentu T 16.2.8)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňuje $\lambda_N(\Omega) < \infty$ a $p \in (1, \infty]$. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$, pak pro všechna $r \in [1, p)$ platí $f \in L^r(\Omega)$ a $\|f\|_r \leq C(\lambda_N(\Omega))\|f\|_p$ (C nezávisí na r). Naopak, jestliže $f \in L^r(\Omega)$ pro všechna $r \in [1, p)$ a existuje $C > 0$ takové, že $\|f\|_r \leq C$ pro všechna $r \in [1, p)$, pak $f \in L^p(\Omega)$ a $\|f\|_p \leq C$ (tatáž konstanta).

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů VI

Věta (3 O konvergenci skoro všude a úplnosti Lebesgueových prostorů V 16.3.3)

Nechť $1 \leq p \leq \infty$ *a* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná. Pak Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ *je úplný a každá posloupnost konvergentní v* $L^p(\Omega)$ *má podposloupnost konvergující skoro všude na* Ω*.*