Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 1.12.2022

Opakování I

Definice (1 Křivky D 17.1.2)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. *Křivkou třídy* C^1 *v* $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ (v případě, že v I leží některý z jeho krajních bodů, jako obvykle v něm uvažujeme jen jednostrannou derivaci, která musí být vlastní). *Křivkou po částech třídy* C^1 *v* $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^N$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}|_{I_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, jsou křivky třídy C^1, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, vnitřky těchto intervalů jsou disjunktní a sousední intervaly obsahují příslušný dělící bod. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}^N$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_N'(t)) \neq \mathbf{0} \qquad \text{na } I$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).
Množina $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle := \boldsymbol{\varphi}(I)$ se nazývá *geometrický obraz křivky* $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud existuje $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se tento vektor nazývá *tečný vektor* ke křivce $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a $\boldsymbol{\tau}(t) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{|\boldsymbol{\varphi}'(t)|}$ (pokud $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ existuje a je netriviální) se nazývá *jednotkový tečný vektor*.

Opakování II

Definice (2 Jednoduchá a uzavřená křivka D 17.1.4)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$ je křivka. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže platí alespoň jedna z podmínek

(i) φ je prostá na I

(ii) $I = [a, b]$ a φ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$
a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b).

Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $I = [a, b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Definice (4 Křivkový integrál prvního a druhého druhu D 17.1.8)

Nechť (φ, I) je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$. Jestliže $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na $\langle\varphi\rangle$, pak *křivkový integrál prvního druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f \,\mathrm{d}s := \int_I f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \,\mathrm{d}t, \qquad \text{kde } \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| := \sqrt{{\varphi_1'}^2(t) + \cdots + {\varphi_N'}^2(t)},$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.
Jestliže $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole definované na $\langle\varphi\rangle$, pak *křivkový integrál druhého druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} := \int_I \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \,\mathrm{d}t$$

(v integrandu napravo je pro každé $t \in I$ skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^N$), pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

Opakování IV

Věta (3 O substituci pro křivkový integrál V 17.1.14)

Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ *je regulární* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^N$, $\eta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má na* $[\alpha, \beta]$ *nenulovou spojitou derivaci a* $\eta([\alpha, \beta]) = [a, b]$. *Pak* $(\boldsymbol{\varphi} \circ \eta, [\alpha, \beta])$ *je regulární* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^N$ *a pro každou funkci* $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *jejíž restrikce na* $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$ *je spojitá na* $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$, *platí*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi} \circ \eta} f \, \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f \, \mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí (znaménko η' *je ve všech bodech intervalu* $[\alpha, \beta]$ *stejné, proto můžeme níže vybrat kterýkoliv z těchto bodů)*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi} \circ \eta} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi} \circ \eta) = \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

Opakování V

Věta (4 O nezávislosti křivkového integrálu na parametrizaci V 17.1.16)

Nechť křivky $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ a $(\boldsymbol{\psi}, [\alpha, \beta])$ jsou jednoduché regulární po částech C^1-křivky na $\mathbb{R}^N$ splňující $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \boldsymbol{\psi} \rangle$ a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce, jejíž restrikce na $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$ je spojitá na $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$. Pak

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f \,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\psi}} f \,\mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí

$$\left| \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \right| = \left| \int_{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi} \right|.$$

Věta (5 O výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu V 17.1.17)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$ má na Ω potenciál U. Pak pro každou regulární po částech C^1-křivku $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ splňující $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a)).$$

Definice (5 Nezávislost integrálu na cestě D 17.1.18)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Řekneme, že křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ *nezávisí na cestě* v Ω, jestliže

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi},$$

kdykoliv $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b]), (\boldsymbol{\psi}, [\alpha, \beta])$ jsou regulární po částech C^1-křivky takové, že platí $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle, \langle \boldsymbol{\psi} \rangle \subset \Omega$, $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(\alpha)$ a $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(\beta)$.

Věta (5 O výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu V 17.1.17)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$ má na Ω potenciál U. Pak pro každou regulární po částech C^1-křivku $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ splňující $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a)).$$

Definice (5 Nezávislost integrálu na cestě D 17.1.18)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Řekneme, že křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ *nezávisí na cestě* v Ω, jestliže

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi},$$

kdykoliv $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b]), (\boldsymbol{\psi}, [\alpha, \beta])$ jsou regulární po částech C^1-křivky takové, že platí $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle, \langle \boldsymbol{\psi} \rangle \subset \Omega$, $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(\alpha)$ a $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(\beta)$.

16.1.4 Křivkový integrál a potenciálnost vektorového pole II

Věta (6 O charakterizaci nezávislosti na cestě V 17.1.19)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.
(i) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\mathbf{T}$ nezávisí na cestě v Ω*
(ii) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ je nulový pro každou uzavřenou regulární po částech C^1-křivku ležící v Ω.*

Věta (7 O vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu V 17.1.20)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená souvislá množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Jestliže křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ nezávisí na cestě v Ω, pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

Věta (6 O charakterizaci nezávislosti na cestě V 17.1.19)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

(i) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\mathbf{T}$ nezávisí na cestě v Ω*

(ii) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ je nulový pro každou uzavřenou regulární po částech C^1-křivku ležící v Ω.*

Věta (7 O vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu V 17.1.20)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená souvislá množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Jestliže křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ nezávisí na cestě v Ω, pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

16.2 Klasická teorie plošného integrálu
16.2.1 k-plochy v $\mathbb{R}^N$ I

Definice (6 k-plocha D 17.2.1)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *k-plocha*, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že platí
(i) $\varphi(E) = M$
(ii) $\varphi \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$
(iii) hodnost Jacobiho matice zobrazení φ je rovna k všude na E.
Zobrazení φ se nazývá *parametrizace* plochy M.
Za 0-*plochu* považujeme libovolný bod v $\mathbb{R}^N$. Plocha se nazývá *jednoduchá*, jestliže navíc φ je prosté na E a $\vec{\varphi}^{-1}$ spojité na $\varphi(E)$.

Tvrzení (1 O korektnosti definice k-plochy V 17.2.4)

Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň jednoduchá k-plocha a jednoduchá l-plocha. Pak $k = l$.

Definice (6 k-plocha D 17.2.1)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *k-plocha*, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že platí

(i) $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$

(ii) $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$

(iii) hodnost Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je rovna k všude na E.

Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá *parametrizace* plochy M.

Za 0-*plochu* považujeme libovolný bod v $\mathbb{R}^N$. Plocha se nazývá *jednoduchá*, jestliže navíc $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na E a $\vec{\varphi}^{\,-1}$ spojité na $\boldsymbol{\varphi}(E)$.

Tvrzení (1 O korektnosti definice k-plochy V 17.2.4)

Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň jednoduchá k-plocha a jednoduchá l-plocha. Pak $k = l$.

16.2.2 Plošný obsah rovinných množin v $\mathbb{R}^N$ I

Definice (7 k-rovnoběžnostěn D 17.2.14)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé vektory a $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Pak množinu

$$P(x_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) := \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{v}_i : (t_1, \dots t_k) \in [0,1]^k \right\}$$

nazýváme *k-rovnoběžnostěnem* určeným bodem x_0 a vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$.

Definice (8 Gramova matice D 17.2.7)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. *Gramovou maticí* příslušející vektorům $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k$ nazýváme matici

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix},$$

kde $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ značí skalární součin vektorů $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$.
V případě, že $\varphi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ patří do $C^1(E; \mathbb{R}^N)$, bude $D\varphi(t)$ zastupovat Jacobiho matici zobrazení φ v bodě $t \in E$ a $\mathbb{G}(D\varphi(t))$ bude Gramova matice aplikovaná na vektory dané sloupci Jacobiho matice.

16.2.2 Plošný obsah rovinných množin v $\mathbb{R}^N$ I

Definice (7 k-rovnoběžnostěn D 17.2.14)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé vektory a $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Pak množinu

$$P(x_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) := \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{v}_i \colon (t_1, \ldots t_k) \in [0,1]^k \right\}$$

nazýváme *k-rovnoběžnostěnem* určeným bodem x_0 a vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Definice (8 Gramova matice D 17.2.7)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. *Gramovou maticí* příslušející vektorům $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_k$ nazýváme matici

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix},$$

kde $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ značí skalární součin vektorů $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$.
V případě, že $\varphi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ patří do $C^1(E; \mathbb{R}^N)$, bude $D\varphi(t)$ zastupovat Jacobiho matici zobrazení φ v bodě $t \in E$ a $\mathbb{G}(D\varphi(t))$ bude Gramova matice aplikovaná na vektory dané sloupci Jacobiho matice.

16.2.2 Plošný obsah rovinných množin v $\mathbb{R}^N$ II

Lemma (1 O charakterizaci regularity Gramovy matice L 17.2.16)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. Pak

$$\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Lemma (2 Gramova matice a ortogonální transformace)

Je-li $\mathbb{A}$ ortogonální matice, pak pro vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ platí

$$\mathbb{G}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \mathbf{A}\boldsymbol{v}_k) = \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$$

Věta (8 O plošném obsahu k-rovnoběžnostěnu V 17.2.15)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Pak pro libovolný k-rovnoběžnostěn je

$$S_k(P) = \sqrt{\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)}$$

kde pro $k = N$ pokládáme $S_N(P) = \lambda_N(P)$.

16.2.2 Plošný obsah rovinných množin v $\mathbb{R}^N$ II

Lemma (1 O charakterizaci regularity Gramovy matice L 17.2.16)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. Pak

$$\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Lemma (2 Gramova matice a ortogonální transformace)

Je-li $\mathbb{A}$ ortogonální matice, pak pro vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ platí

$$\mathbb{G}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{v}_k) = \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$$

Věta (8 O plošném obsahu k-rovnoběžnostěnu V 17.2.15)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Pak pro libovolný k-rovnoběžnostěn je

$$S_k(P) = \sqrt{\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)}$$

kde pro $k = N$ pokládáme $S_N(P) = \lambda_N(P)$.

16.2.2 Plošný obsah rovinných množin v $\mathbb{R}^N$ II

Lemma (1 O charakterizaci regularity Gramovy matice L 17.2.16)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$ *a* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. *Pak*

$$\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Lemma (2 Gramova matice a ortogonální transformace)

Je-li $\mathbb{A}$ *ortogonální matice, pak pro vektory* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\dots$, $\mathbf{v}_k$ *platí*

$$\mathbb{G}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{v}_k) = \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$$

Věta (8 O plošném obsahu k-rovnoběžnostěnu V 17.2.15)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. *Pak pro libovolný k-rovnoběžnostěn je*

$$S_k(P) = \sqrt{\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)}$$

kde pro $k = N$ *pokládáme* $S_N(P) = \lambda_N(P)$.

Definice (9 Tečný prostor a tečná rovina D 17.2.17)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná zobrazením $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$ a $\tau \in E$. *Tečným prostorem* k ploše M v bodě $x = \varphi(\tau)$ nazýváme prostor

$$T_x M := \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\tau), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\tau)\right\}.$$

Tečnou rovinou k ploše M v bodě $x = \varphi(\tau)$ nazýváme množinu

$$R\left(x; \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\tau), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\tau)\right) := \left\{x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\tau)\colon \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definice (10 Vektorový součin D 17.2.19)

Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé vektory. Jejich *vektorovým součinem* nazveme vektor

$$[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}] := \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{N-1} & \mathbf{e}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_N^1 & \cdots & v_N^{N-1} & \mathbf{e}_N \end{pmatrix}$$

(souřadnice vektorů v^j jsou zapsány do sloupců a jednotlivé sčítance figurující v determinantu chápeme jako vektory vzniklé součinem $(N-1)$-tice reálných čísel a jednoho vektoru ze sloupce úplně napravo).

16.2.3 Tečný prostor, tečná rovina a vektorový součin v $\mathbb{R}^N$ III

Lemma (3 Cauchy–Binetovy formule V 17.2.22)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\mathbb{A}$ je matice o k řádcích a N sloupcích a $\mathbb{B}$ je matice o N řádcích a k sloupcích. Pak

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_J \det \mathbb{A}(J) \det \mathbb{B}(J),$$

kde J probíhá všechny k-tice indexů $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq N$ a $\mathbb{A}(J)$ je čtvercová matice získaná z matice $\mathbb{A}$ vynecháním sloupců, jejichž pořadová čísla neleží v J a analogicky $\mathbb{B}(J)$ se získala z $\mathbb{B}$ vynecháním řádků, jejichž pořadová čísla neleží v J.

Věta (9 O vlastnostech vektorového součinu V 17.2.21)

Nechť $N \in \mathbb{N}$ a nechť vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé. Pak $\boldsymbol{v} := [\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}]$ je vektor splňující

(i) *$\boldsymbol{v}$ je ortogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}$*

(ii) *platí $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1})$*

(iii) *determinant matice, do jejíž sloupců napíšeme vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}, \boldsymbol{v}$, je kladný.*

16.2.3 Tečný prostor, tečná rovina a vektorový součin v $\mathbb{R}^N$ III

Lemma (3 Cauchy–Binetovy formule V 17.2.22)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\mathbb{A}$ je matice o k řádcích a N sloupcích a $\mathbb{B}$ je matice o N řádcích a k sloupcích. Pak

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_J \det \mathbb{A}(J) \det \mathbb{B}(J),$$

kde J probíhá všechny k-tice indexů $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq N$ a $\mathbb{A}(J)$ je čtvercová matice získaná z matice $\mathbb{A}$ vynecháním sloupců, jejichž pořadová čísla neleží v J a analogicky $\mathbb{B}(J)$ se získala z $\mathbb{B}$ vynecháním řádků, jejichž pořadová čísla neleží v J.

Věta (9 O vlastnostech vektorového součinu V 17.2.21)

Nechť $N \in \mathbb{N}$ a nechť vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé. Pak $\boldsymbol{v} := [\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}]$ je vektor splňující

(i) *$\boldsymbol{v}$ je ortogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}$*

(ii) *platí $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1})$*

(iii) *determinant matice, do jejíž sloupců napíšeme vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}, \boldsymbol{v}$, je kladný.*

Definice (11 Plošný integrál prvního druhu D 17.2.8)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná zobrazením $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* předpisem

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \int_E f(\varphi(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\varphi(t))}\,\mathrm{d}t,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný. Číslo

$$S_k(M) := \int_M 1 \,\mathrm{d}S$$

nazýváme *k-rozměrným plošným obsahem* k-plochy M.