Početní část zkoušky 17.6.2020

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Za předpokladu, že existuje
$$\min_{y\in M}\int_0^\pi (y')^2\,\mathrm{d}x,$$
kde
$$M=\Big\{u\in C^1([0,\pi])\colon u(0)=u(\pi)=0,\ \int_0^\pi y^2\,\mathrm{d}x=1\Big\},$$
nalezněte toto minimum i funkce z M, ve kterých se toto minimum nabývá.

2. (7b) V závislosti na parametru $\alpha\in\mathbb{R}$ vyšetřete charakter konvergence (tj. bodová konvergence, stejnoměrná konvergence, lokálně stejnoměrná konvergence) řady funkcí
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{k^4x}{1+k^\alpha x^2}$$
na intervalu $(0,\infty)$.

   Pokud Vám zbývá čas a chuť, můžete ukázat, že pro ty hodnoty parametru, pro které jste dokázali lokálně stejnoměrnou konvergenci, ale ne stejnoměrnou konvergenci, řada skutečně stejnoměrně nekonverguje. Za správné řešení můžete získat dva prémiové body.

3. (8b) Určete, pro které hodnoty parametrů α, $\beta\in\mathbb{R}$ konverguje integrál
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{1-\cosh(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Pro tyto hodnoty integrál spočtěte pomocí vět o derivaci a spojitosti integrálu závislého na parametru. Všechny kroky ověřte pomocí příslušných vět!

4. (6b) Spočtěte
$$\int_\Omega \frac{xyz}{\sqrt{x^2+4y^2+8z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
kde
$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2<1, x,y,z>0\}.$$