Početní část zkoušky 10.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte všechny body podezřelé z existence extrému funkcionálu
$$\Phi[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x$$
na množině
$$M = \left\{ y \in C^1([0,1]) : y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y\,\mathrm{d}x = 1 \right\}.$$
Podmínku z Věty o Lagrangeových multiplikátorech nemusíte ověřovat.

2. (6b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ studujte charakter konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) posloupnosti funkcí
$$\varphi_n(x) = n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2 x}, \quad n \in \mathbb{N}$$
na intervalu $[0,\infty)$ resp. $(0,\infty)$.

3. (9b) Pro $a \geq -1$ spočtěte
$$\varphi(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + ax^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Pro ověření vlastností funkce φ zkontrolujte splnění předpokladů daných vět.

   Nápověda: Je třeba uvažovat zvlášť $a > 0$ a $-1 \leq a < 0$ a dále též $a = -1$ a $a > -1$. $\varphi(a)$ je totiž spojitá na $[-1,\infty)$, ale diferencovatelná pouze na $(-1,\infty)$. Po ověření těchto vlastností tedy spočítejte $\varphi'(a)$ zvlášť na $(-1,0)$ a na $(0,\infty)$, určete $\varphi(a)$ na těchto intervalech a poté ze spojitosti dopočítejte hodnoty funkce ve zbylých bodech.

4. (6b) Nalezněte plochu povrchu útvaru ohraničeného plochami
$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}} + z = 1 \qquad z = 0.$$

Teoretická část zkoušky 10.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (8b)
   (a) Definujte prostory $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$ pro (i) $1 \leq p < \infty$ a (ii) $p = \infty$.
   (b) Vůči jaké normě jsou prostory $L^p(\Omega)$ lineární normované prostory? Co platí pro $\mathcal{L}^p(\Omega)$?
   (c) Ukažte, že z libovolné cauchyovské posloupnosti v $L^p(\Omega)$ lze vybrat podposloupnost konvergentní s.v. na Ω.
   (d) Ukažte, jak z bodu (c) plyne úplnost prostorů $L^p(\Omega)$.

2. (7b) (a) Uveďte a dokažte, jak souvisí křivkový integrál druhého druhu s potenciálností vektorového pole, jehož integrál počítáte.
   (b) Nechť $u = (u_1, u_2)$ je vektorové pole splňující $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Je toto pole nutně potenciální v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? Dokažte, nebo uveďte protipříklad (popřípadě naznačte, na čem je založen). Ve druhém případě uveďte, co dalšího je třeba předpokládat, aby pole bylo potenciální.

3. (7b)
   a) Definujte pojem ortogonální (ortonormální) systém v separabilním Hilbertově prostoru H.
   b) Definujte pojem Fourierova řada prvku $f \in H$ vzhledem k danému ortonormálnímu systému.
   c) Formulujte a dokažte Větu o nejlepší aproximaci a s ní související věty o Besselově nerovnosti a vztahu konvergence Fourierovy řady a Parsevalovy rovnosti.
   d) Formulujte a dokažte Riesz–Fischerovu větu.