Početní část zkoušky 8.2.2023

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte všechny stacionární body funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \left(y + \frac{(y')^2}{2} \frac{1}{\ln^2 x} \right) \mathrm{d}x$$

na množině

$$M = \left\{ y \in C^1([\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]) : y(\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^2}{4},\ y(\mathrm{e}^2) = 2\mathrm{e}^2 + \frac{5}{4}\mathrm{e}^4 + \mathrm{e} \right\}.$$

2. (5b) Vyšetřete charakter konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) aposloupnosti funkcí

$$f_n(x) = (1 + x^{2n})^{\frac{2}{n}}$$

na intervalu $[0, \infty)$ resp. $(0, \infty)$.

3. (10b) Spočtěte

$$I = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Nápověda: Nejprve dokažte, že integrál konverguje (jako Lebesgueův integrál). Poté uvažujte

$$\varphi(a) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Spočtěte $\varphi''(a)$ pomocí derivace integrálu závislého na parametru a zpětně dopočtěte $\varphi(a)$ na $(0, \infty)$. Bude se Vám hodit chování $\varphi(a)$ a $\varphi'(a)$ pro $a \to \infty$. Nakonec proveďte limitu $a \to 0+$. Nezapomeňte ověřit předpoklady všech použitých vět.

4. (6b) Spočtěte tok pole $\mathbf{v} = (x^2, 2y, 2z)$ ven z tělesa omezeného paraboloidem $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$ $(a, b, c > 0)$ a rovinou $x = a$.

Teoretická část zkoušky 8.2.2023

Jméno:

Skupina:

1. (7b) a) Formulujte Bolzano–Cauchyovu podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ na $[a, b]$.
   b) Použitím Bolzano–Cauchyovy podmínky dokažte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence.
   c) Použitím Bolzano–Cauchyova kritéria dokažte, že řada
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$$
   nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu obsahující nulu.

2. (8b) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $1 \leq p \leq \infty$. Definujte
   (I) $f_n \rightrightarrows f$ na Ω
   (II) $f_n \to f$ na Ω
   (III) $f_n \to f$ s.v. na Ω
   (IV) $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$.
   Dokažte, nebo uveďte protipříklady:
   (I) $\Longrightarrow$ (IV)
   (IV) $\Longrightarrow$ (III)
   (IV) $\Longrightarrow$ existuje vybraná podposloupnost tak, že $f_{n_k} \to f$ s.v. na Ω
   (II) $\Longrightarrow$ (IV).

3. (8b) (a) Definujte Fourierovy řady v separabilním Hilbertově prostoru.
   (b) Formulujte a dokažte Besselovu nerovnost, Parsevalovu rovnost a Riesz–Fischerovu větu.
   (c) Dokažte, že každý separabilní Hilbertův prostor je izomorfní s ℓ_2. Pokud k důkazu potřebujete jinou větu než je uvedeno v části (b), větu zformulujte, nemusíte ji dokazovat.