Sada příkladů 3/11

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

1. $\displaystyle\int_\varphi z\,\mathrm{d}z$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu.

2. $\displaystyle\int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.

3. $\displaystyle\int_\varphi |z|\,\mathrm{d}z$, φ je průvodič bodu $2-\mathrm{i}$.

4. $\displaystyle\int_\varphi \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.

5. Jakých hodnot může nabývat $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3\mathrm{i}$.

6. Vypočtěte $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
   a) 1 b) 0 c) -1

7. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
   a) -1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

8. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+a^2}$, je-li φ: $2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_{\varphi} |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+4}$. kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2\mathrm{i}$ a poloměru 2.

3. Spočtěte
   a) $\int_{|z+\mathrm{i}|=3} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$
   b) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$.

4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2.

5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \to 0$ když $z \to \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{\mathrm{i}\alpha-\infty}^{\mathrm{i}\alpha+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α.

6. Dokažte:
   Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \leq r_0$, $0 \leq \arg(z-a) \leq b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \leq 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r\to 0+} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}Ab$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyťatý úhlem $0 \leq \arg(z-a) \leq b$.

7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
   a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
   b) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.