Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 13.2.2023

19 Funkce komplexní proměnné

19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra I

Definice (1 Limita v $\mathbb{C}^*$)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}^*$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{C}^*$ právě tehdy, když pro kaťdé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$.

Důsledek (1 Úplnost $\mathbb{C}$)

$\mathbb{C}$ *je úplný normovaný vektorový prostor s normou* $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Definice (2 Funkce komplexní proměnné D 20.1.2)

Nechť $A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Pak se f nazývá *funkce komplexní proměnné* a A je jejím definičním oborem.

19 Funkce komplexní proměnné

19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra I

Definice (1 Limita v $\mathbb{C}^*$)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}^*$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{C}^*$ právě tehdy, když pro kařdé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$.

Důsledek (1 Úplnost $\mathbb{C}$)

$\mathbb{C}$ je úplný normovaný vektorový prostor s normou $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Definice (2 Funkce komplexní proměnné D 20.1.2)

Nechť $A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Pak se f nazývá *funkce komplexní proměnné* a A je jejím definičním oborem.

19 Funkce komplexní proměnné
19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra I

Definice (1 Limita v $\mathbb{C}^*$)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}^*$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{C}^*$ právě tehdy, když pro kařdé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$.

Důsledek (1 Úplnost $\mathbb{C}$)

$\mathbb{C}$ je úplný normovaný vektorový prostor s normou $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Definice (2 Funkce komplexní proměnné D 20.1.2)

Nechť $A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Pak se f nazývá *funkce komplexní proměnné* a A je jejím definičním oborem.

19 Funkce komplexní proměnné

19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra II

Definice (3 Limita funkce komplexní proměnné D 20.1.4)

Nechť $a \in \mathbb{C}^*$ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{C}^*$, funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A a $b \in \mathbb{C}^*$. Řekneme, že f má v bodě a *limitu* b *vzhledem k* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{P}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(b).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in A}} f(z) = b$ nebo stručněji (je-li množina A jasně daná) $\lim_{z \to a} f(z) = b$.

Definice (4 Spojitost funkce komplexní proměnné D 20.1.5)

Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f je v bodě a *spojitá vzhledem k* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{U}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)).$$

Definice (3 Limita funkce komplexní proměnné D 20.1.4)

Nechť $a \in \mathbb{C}^*$ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{C}^*$, funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A a $b \in \mathbb{C}^*$. Řekneme, že f má v bodě *a limitu b vzhledem k A*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{P}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(b).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in A}} f(z) = b$ nebo stručněji (je-li množina A jasně daná) $\lim_{z \to a} f(z) = b$.

Definice (4 Spojitost funkce komplexní proměnné D 20.1.5)

Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f je v bodě *a spojitá vzhledem k A*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{U}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)).$$

19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra III

Definice (5 Maximum modulu funkce komplexní proměnné D 20.1.9)

Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f má v bodě a *maximum modulu*, jestliže

$$|f(z)| \leq |f(a)| \qquad \text{pro všechna } z \in A.$$

Analogicky pro minimum modulu. O funkci f říkáme, že je *omezená* na A, je-li modulus f, tedy $|f|$, omezený.

Důsledek (2 Nabývání maxima/minima modulu)

Spojitá funkce na kompaktní množině $K \subset \mathbb{C}$ je omezená a nabývá svého maxima i minima modulu na K.

19.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra III

Definice (5 Maximum modulu funkce komplexní proměnné D 20.1.9)

Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f má v bodě a *maximum modulu*, jestliže

$$|f(z)| \leq |f(a)| \qquad \text{pro všechna } z \in A.$$

Analogicky pro minimum modulu. O funkci f říkáme, že je *omezená* na A, je-li modulus f, tedy $|f|$, omezený.

Důsledek (2 Nabývání maxima/minima modulu)

Spojitá funkce na kompaktní množině $K \subset \mathbb{C}$ je omezená a nabývá svého maxima i minima modulu na K.

Definice (6 Derivace funkce komplexní proměnné D 20.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f má v a *derivaci*, jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

V takovém případě hodnotu uvedené limity nazýváme *derivací* funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Definice (7 Holomorfní funkce D 20.2.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f je *holomorfní* v bodě a, jestliže existuje okolí bodu a, na němž má f derivaci. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω, jestliže f má derivaci všude na Ω.

Definice (6 Derivace funkce komplexní proměnné D 20.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f má v a *derivaci*, jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

V takovém případě hodnotu uvedené limity nazýváme *derivací* funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Definice (7 Holomorfní funkce D 20.2.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f je *holomorfní* v bodě a, jestliže existuje okolí bodu a, na němž má f derivaci. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω, jestliže f má derivaci všude na Ω.

19.2 Holomorfní funkce II

Věta (1 O aritmetice holomorfních funkcí V 20.2.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, g jsou holomorfní na Ω. Pak
(i) *funkce $f + g$ je holomorfní na Ω a platí $(f+g)' = f' + g'$*
(ii) *funkce $f - g$ je holomorfní na Ω a platí $(f-g)' = f' - g'$*
(iii) *funkce fg je holomorfní na Ω a platí $(fg)' = f'g + fg'$*
(iv) *pokud navíc $g \neq 0$ všude na Ω, pak $\frac{f}{g}$ je holomorfní na Ω a platí $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$*
(v) *pokud navíc $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina splňující $f(\Omega) \subset U$ a g je holomorfní na U, pak $g \circ f$ je holomorfní na Ω a platí $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ na Ω.*

Věta (2 O derivaci inverzní funkce V 20.2.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \mathbb{C}$.
(i) *Jestliže existuje $f'(a)$, pak je f omezená na jistém okolí bodu a.*
(ii) *Jestliže je f bijekcí mezi Ω a $f(\Omega)$, $f(\Omega)$ je otevřená množina, f je holomorfní v a, $f'(a) \neq 0$ a f^{-1} je spojitá na $f(\Omega)$, pak*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

19.2 Holomorfní funkce II

Věta (1 O aritmetice holomorfních funkcí V 20.2.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, g jsou holomorfní na Ω. Pak
(i) *funkce $f+g$ je holomorfní na Ω a platí $(f+g)' = f' + g'$*
(ii) *funkce $f-g$ je holomorfní na Ω a platí $(f-g)' = f' - g'$*
(iii) *funkce fg je holomorfní na Ω a platí $(fg)' = f'g + fg'$*
(iv) *pokud navíc $g \neq 0$ všude na Ω, pak $\frac{f}{g}$ je holomorfní na Ω a platí*
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
(v) *pokud navíc $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina splňující $f(\Omega) \subset U$ a g je holomorfní na U, pak $g \circ f$ je holomorfní na Ω a platí*
$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ *na Ω.*

Věta (2 O derivaci inverzní funkce V 20.2.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \mathbb{C}$.
(i) *Jestliže existuje $f'(a)$, pak je f omezená na jistém okolí bodu a.*
(ii) *Jestliže je f bijekcí mezi Ω a $f(\Omega)$, $f(\Omega)$ je otevřená množina, f je holomorfní v a, $f'(a) \neq 0$ a f^{-1} je spojitá na $f(\Omega)$, pak*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$