Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 22.2.2023

Opakování I

Věta (12 Jordanova věta V 20.4.1)

Nechť φ *je Jordanova křivka v* $\mathbb{C}$*. Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{Int}\varphi$ *(vnitřek* φ*) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek* φ*) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{C}$*, přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$.

Definice (13 Jednoduše souvislá oblast D 20.4.2)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existuje spojitá funkce $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ a bod $z \in \Omega$ takový, že

$$H(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad H(0,s) = H(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad H(t,1) = z \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Opakování I

Věta (12 Jordanova věta V 20.4.1)

Nechť φ *je Jordanova křivka v* $\mathbb{C}$*. Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{Int}\varphi$ *(vnitřek* φ*) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek* φ*) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{C}$*, přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$*.*

Definice (13 Jednoduše souvislá oblast D 20.4.2)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existuje spojitá funkce $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ a bod $z \in \Omega$ takový, že

$$H(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad H(0,s) = H(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad H(t,1) = z \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Opakování II

Věta (13 Cauchyova věta (první verze) V 20.4.3)

Nechť φ *je regulární Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*, funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$ *a holomorfní na* $\operatorname{Int}\varphi$*. Pak*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Tvrzení (1 Cauchyova věta pro trojúhelník T 20.4.4)

Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je uzavřený nedegenerovaný trojúhelník a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ splňující $M \subset \Omega$. Nechť φ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka parametrizující ∂M. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Tvrzení (1 Cauchyova věta pro trojúhelník T 20.4.4)

Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je uzavřený nedegenerovaný trojúhelník a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ splňující $M \subset \Omega$. Nechť φ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka parametrizující ∂M. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důsledek (4 Existence primitivní funkce pro holomorfní funkce Ds 20.4.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω. Pak má f na Ω primitivní funkci.

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int} \varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \ldots, k\},$$

$$(\operatorname{Int} \varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int} \varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

19.4 Cauchyova věta, komplexní logaritmus II

Důsledek (4 Existence primitivní funkce pro holomorfní funkce Ds 20.4.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω. Pak má f na Ω primitivní funkci.

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int} \varphi \qquad \textit{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int} \varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) = \emptyset \qquad \textit{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int} \varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

19.4 Cauchyova věta, komplexní logaritmus III

Věta (16 O komplexním logaritmu V 20.4.8)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je jednoduše souvislá oblast,* $1 \in \Omega$ *a* $0 \notin \Omega$*. Potom je v oblasti* Ω *definovaná funkce* $\log_\Omega$ *splňující*
(i) $\mathrm{e}^{\log_\Omega z} = z$ *na* Ω
(ii) $\log_\Omega$ *je holomorfní na* Ω
(iii) *existuje* $\delta \in (0,1)$ *takové, že* $\log_\Omega r = \log r$ *(napravo je reálný logaritmus) pro všechna* $r \in (1-\delta, 1+\delta)$*.*