Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 13.3.2023

Opakování I

Věta (29 O Laurentově rozvoji V 20.7.6)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le a < b \le \infty$ *a funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $B_{a,b}(z_0)$. *Pak existuje jednoznačně určený systém koeficientů* $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *takový, že platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{a,b}(z_0)$$

s konvencí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ *a* $r \in (a, b)$ *platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Opakování II

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je

(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$

(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Opakování II

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je
(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z \to z_0} f(z)$
(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$
(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Opakování III

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z-z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_\infty f := -a_{-1}.$$

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka, $k \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Pak

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Opakování III

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_\infty f := -a_{-1}.$$

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Opakování IV

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Ext}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$. Pak

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_\infty f.$$

Věta (38 O součtu reziduí V 20.8.21)

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Pak

$$\operatorname{Res}_\infty f + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = 0.$$

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Ext}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{Res}_\infty f.$$

Věta (38 O součtu reziduí V 20.8.21)

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$*. Pak*

$$\operatorname{Res}_\infty f + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = 0.$$

Opakování V

Věta (39 První věta o výpočtu reziduí V 20.9.2)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, *funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* z_0 *izolovanou singularitu a funkce* $g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *jsou v bodě* z_0 *holomorfní.*

(i) *Má-li* f *v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu, pak* $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.

(ii) *Má-li* f *v bodě* z_0 *pól násobnosti nejvýše* $k \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

(iii) *Má-li* f *v bodě* z_0 *pól násobnosti jedna, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Speciálně pokud $g(z_0) = 0$, *pak má funkce* fg *v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu.*

(iv) *Jestliže* h *má v bodě* z_0 *jednoduchý kořen, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

19.10. Aplikace reziduové věty na výpočet integrálů

Tvrzení (2 O obíhání části kružnice T 20.9.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě z_0 jednoduchý pól. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha < \beta$ a $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Pro každé $\varepsilon > 0$ definujme křivku φ_ε předpisem

$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\alpha, \beta].$$

Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\beta - \alpha)\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_0} f.$$

Věta (40 Druhá věta o výpočtu reziduí V 20.9.4)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v nekonečnu izolovanou singularitu.
(i) *Platí $\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0 g$, kde funkce g je definovaná předpisem $g(w) = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})$.*
(ii) *Existují-li $R, K > 0$ taková, že $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$ kdykoliv $|z| > R$, pak $\mathrm{Res}_\infty f = 0$.*
(iii) *Má-li f v nekonečnu pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, pak*

$$\mathrm{Res}_\infty f = \lim_{z \to \infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} \Big(z^{k+2} f^{(k+1)}(z) \Big).$$

19.10. Aplikace reziduové věty na výpočet integrálů

Tvrzení (2 O obíhání části kružnice T 20.9.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* z_0 *jednoduchý pól. Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *splňují* $\alpha < \beta$ *a* $\beta - \alpha \leq 2\pi$*. Pro každé* $\varepsilon > 0$ *definujme křivku* φ_ε *předpisem*

$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\alpha, \beta].$$

Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\beta - \alpha)\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_0} f.$$

Věta (40 Druhá věta o výpočtu reziduí V 20.9.4)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v nekonečnu izolovanou singularitu.*
(i) *Platí* $\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0\, g$*, kde funkce* g *je definovaná předpisem* $g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$.
(ii) *Existují-li* $R, K > 0$ *taková, že* $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$ *kdykoliv* $|z| > R$*, pak* $\mathrm{Res}_\infty f = 0$.
(iii) *Má-li* f *v nekonečnu pól násobnosti nejvýše* $k \in \mathbb{N}$*, pak*

$$\mathrm{Res}_\infty f = \lim_{z \to \infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} \left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z)\right).$$