Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 24.4.2023

Opakování I

Definice (13 Funkce x_+^λ D 23.9.1)

Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ značíme

$$x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Definice (14 Holomorfní parametrický systém distribucí, izolovaná singularita parametrického systému distribucí, reziduum parametrického systému distribucí D 23.9.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ je parametrický systém distribucí. Řekneme, že parametrický systém distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ *holomorfně závisí* na $\lambda \in G$, jestliže funkce $\lambda \mapsto \langle H_\lambda, \varphi \rangle$ je holomorfní na G pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Řekneme, že parametrický systém distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ má v bodě $\lambda_0 \in G$ *izolovanou singularitu*, jestliže má funkce $\lambda \mapsto \langle H_\lambda, \varphi \rangle$ izolovanou singularitu v bodě λ_0 pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Řekneme, že distribuce $H \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je *reziduem* parametrického systému distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ v bodě $\lambda_0 \in G$, jestliže

$$\langle H, \varphi \rangle = \operatorname{Res}_{\lambda_0} \langle H_\lambda, \varphi \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

V takovém případě distribuci H značíme $\operatorname{Res}_{\lambda_0} H_\lambda$.

Definice (15 Parametrické systémy distribucí $\{H_{x_+^\lambda}\}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}$ D 23.9.4)

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak na množině $G_k := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re}\lambda > -k, -\lambda \notin \mathbb{N}\}$ definujeme parametrické systémy distribucí $\{H_{x_+^\lambda}\}_{G_k}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}_{G_k}$ pomocí předpisů

$$H_{x_+^\lambda} := \frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)}$$

a

$$\langle H_{x_-^\lambda}, \varphi\rangle = \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Opakování IV

Věta (9 O vlastnostech distribucí $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ V 23.9.5)

(i) *Distribuce* $H_{x_+^\lambda}$ *a* $H_{x_-^\lambda}$ *jsou definované pro všechna* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *a platí*

$$xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}} \qquad a \qquad -xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}.$$

(ii) *Platí* $H_{x_+^0} = T_{x_+^0} = T_H$ *(H je Heavisideova funkce).*
(iii) *Pro všechna* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *platí*

$$DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}} \qquad DH_{x_-^\lambda} = -\lambda H_{x_-^{\lambda-1}}.$$

(iv) *Pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *mají parametrické systémy distribucí* $\{H_{x_+^\lambda}\}_{\mathbb{C}\setminus\{-n\colon n\in\mathbb{N}\}}$ *a* $\{H_{x_-^\lambda}\}_{\mathbb{C}\setminus\{-n\colon n\in\mathbb{N}\}}$ *izolovanou singularitu v bodě* $-k$*. Navíc*

$$\operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1}\frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!} \qquad a \qquad \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}.$$

22.9.3 Distribuce $H_{|x|^\lambda}$, $H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$ a $H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}$ a $H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}$ I

Definice (16 Parametrické systémy distribucí $\{H_{|x|^\lambda}\}$ a $\{H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}\}$ D 23.9.8)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ definujme distribuce

$$H_{|x|^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x} := H_{x_+^\lambda} - H_{x_-^\lambda}\,.$$

Dále pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujeme (ve smyslu slabé* konvergence distribucí)

$$H_{x^{-2m}} := \lim_{\lambda \to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{x^{-2m+1}} := \lim_{\lambda \to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}.$$

Definice (17 Parametrické systémy distribucí $\{H_{(x\pm\mathrm{i}0)^\lambda}\}$ D 23.9.10)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ položme

$$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}\,.$$

Definice (16 Parametrické systémy distribucí $\{H_{|x|^\lambda}\}$ a $\{H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}\}$ D 23.9.8)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$ definujme distribuce

$$H_{|x|^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x} := H_{x_+^\lambda} - H_{x_-^\lambda}\,.$$

Dále pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujeme (ve smyslu slabé* konvergence distribucí)

$$H_{x^{-2m}} := \lim_{\lambda \to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{x^{-2m+1}} := \lim_{\lambda \to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}.$$

Definice (17 Parametrické systémy distribucí $\{H_{(x\pm\mathrm{i}0)^\lambda}\}$ D 23.9.10)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$ položme

$$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}\,.$$

Tvrzení (4 T 23.9.11)

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ existuje limita níže na levé straně (a definuje tudíž novou distribuci uvedenou na pravé straně rovnosti)

$$\lim_{\lambda \to -k} \left(H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \lambda \pi} H_{x_-^\lambda} \right) =: H_{(x \pm \mathrm{i}0)^{-k}}.$$

Platí

$$H_{(x \pm \mathrm{i}0)^{-k}} = H_{x^{-k}} \mp \frac{\mathrm{i}\pi (-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} \delta_0.$$

Tento vztah implikuje

$$H_{x^{-k}} = \frac{1}{2} \left(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} + H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} \right)$$

a

$$H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} - H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} = -2\mathrm{i}\pi \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} \delta_0.$$

Definice (1 Prostor $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ D 24.1.1)

Nechť $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pro každé $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definujme jeho normu

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N, |\alpha| \leq p}} (1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dále definujme množinu

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)},$$

kde uzávěr bereme v prostoru $C^p(\mathbb{R}^N)$ vzhledem k normě $\varphi \mapsto \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}$. Navíc pro $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ zavádíme na prostoru $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ konvergenci

$$\varphi_k \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\longrightarrow} 0 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \|\varphi_k\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

a

$$\varphi_k \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\longrightarrow} \varphi \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\longrightarrow} 0.$$

23.1 Prostor temperovaných distribucí II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) \colon (1+|x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \le p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \le c_\alpha (1+|x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. Pak operace $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

23.1 Prostor temperovaných distribucí II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) \colon (1+|x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\to} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \le p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \le c_\alpha (1+|x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. Pak operace $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

23.1 Prostor temperovaných distribucí II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí*

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) \colon (1+|x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \leq p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha (1+|x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. *Pak operace* $\varphi \mapsto a\varphi$ *spojitě zobrazuje* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

23.1 Prostor temperovaných distribucí III

Definice (3 Temperované distribuce D 24.1.6)

Prostorem *temperovaných distribucí* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ nazýváme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, kde spojitost funkcionálu T chápeme tak, že $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$ implikuje $\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$. Dále definujeme

$$T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Analogicky pro všechna $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme $(\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N))'$ (často se též značí $\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)$) jako množinu spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$. Navíc pro tyto funkcionály zavádíme

$$||T||_{\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1} |\langle T, \varphi \rangle|.$$

Lemma (2 L 24.1.8)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a platí

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$, pak

23.1 Prostor temperovaných distribucí III

Definice (3 Temperované distribuce D 24.1.6)

Prostorem *temperovaných distribucí* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ nazýváme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, kde spojitost funkcionálu T chápeme tak, že $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$ implikuje $\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$. Dále definujeme

$$T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Analogicky pro všechna $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme $(\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N))'$ (často se též značí $\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)$) jako množinu spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$. Navíc pro tyto funkcionály zavádíme

$$||T||_{\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1} |\langle T, \varphi \rangle|.$$

Lemma (2 L 24.1.8)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a platí*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$*, pak*

Věta (1 O charakterizaci slabé* konvergence temperovaných distribucí V 24.1.9)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je taková posloupnost, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *má číselná posloupnost* $\{\langle T_k, \varphi \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ *vlastní limitu pro* $k \to \infty$*. Pak funkcionál* T *definovaný předpisem*

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{k \to \infty} \langle T_k, \varphi \rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

splňuje $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$*.*

Věta (2 O omezené posloupnosti temperovaných distribucí V 24.1.10)

Nechť posloupnost temperovaných distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *splňuje*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Pak existují $C > 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

23.1 Prostor temperovaných distribucí IV

Věta (1 O charakterizaci slabé* konvergence temperovaných distribucí V 24.1.9)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je taková posloupnost, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *má číselná posloupnost* $\{\langle T_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ *vlastní limitu pro* $k \to \infty$*. Pak funkcionál* T *definovaný předpisem*

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi\rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

splňuje $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$*.*

Věta (2 O omezené posloupnosti temperovaných distribucí V 24.1.10)

Nechť posloupnost temperovaných distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *splňuje*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Pak existují $C > 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Důsledek (1 Důsl. 24.1.11)

Pro každou temperovanou distribuci $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *existují* $C > 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Navíc lze v takovém případě uvedenou distribuci prodloužit na prvek $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$.

Důsledek (2 Důsl. 24.1.13)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je posloupnost temperovaných distribucí taková, že* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *pro jisté* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Pak existuje* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *takové, že distribuce* $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ *a* T *je možné rozšířit na prvky* $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$ *a pro rozšířené distribuce platí*

$$T_k \rightharpoonup^* T \qquad \text{v } \mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N).$$

Důsledek (1 Důsl. 24.1.11)

Pro každou temperovanou distribuci $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Navíc lze v takovém případě uvedenou distribuci prodloužit na prvek $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$.

Důsledek (2 Důsl. 24.1.13)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ je posloupnost temperovaných distribucí taková, že $T_k \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ pro jisté $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak existuje $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že distribuce $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ a T je možné rozšířit na prvky $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$ a pro rozšířené distribuce platí

$$T_k \rightharpoonup^* T \qquad \text{v } \mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N).$$