Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 17.5.2023

Opakování I

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^{\alpha}\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle := \lim_{k \to \infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle$$

$$\text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi \rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování I

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^\alpha \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle$$

$$\text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi \rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování II

Věta (7 O vlastnostech konvoluce distribucí V 24.3.17)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.
(i) *Jestliže existuje* $T \star G$, *pak existuje i* $G \star T$ *a platí* $T \star G = G \star T$ *(tedy konvoluce je komutativní).*
(ii) *Jestliže existuje* $T \star G$, *pak existují i* $D^\alpha T \star G$ *a* $T \star D^\alpha G$ *a platí*

$$D^\alpha (T \star G) = D^\alpha T \star G = T \star D^\alpha G.$$

Opakování III

Věta (8 O existenci konvoluce distribucí V 24.3.20)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$*.*
(i) *Jestliže distribuce* G *má kompaktní nosič, pak existuje* $T \star G$ *a navíc platí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *je libovolná funkce splňující* $\eta \equiv 1$ *na nějakém okolí* $\operatorname{supp} G$*.*
(ii) *Jestliže distribuce* G *má kompaktní nosič a navíc* $T = T_f$ *je regulární distribuce reprezentovaná funkcí* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$*, pak* $T_f \star G$ *je regulární distribuce reprezentovaná funkcí*

$$x \mapsto \langle \widetilde{G}(y), f(x-y) \rangle,$$

kde $\widetilde{G}$ *je prodloužení distribuce* G *na prvek* $(C^\infty(\mathbb{R}^N))'$*.*
(iii) *Nechť* $N = 1$ *a* $\operatorname{supp} T$ *spolu se* $\operatorname{supp} G$ *jsou zleva omezené. Pak* $T \star G$ *existuje a platí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

kde ξ, η *jsou libovolné* $C^\infty(\mathbb{R})$*-funkce splňující* $\xi \equiv 1$ *na nějakém okolí nosiče* T *a* $\eta \equiv 1$ *na nějakém okolí* $\operatorname{supp} G$*, a* $\xi \equiv 0$ *a* $\eta \equiv 0$ *na nějakém intervalu tvaru* $(-\infty, -K)$*,* $K > 0$*.*

Opakování IV

Věta (9 O konvoluci temperovaných distribucí V 24.3.21)

(i) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *má kompaktní nosič. Pak* $T \star G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *je libovolná funkce splňující* $\eta \equiv 1$ *na nějakém okolí* $\operatorname{supp} G$.
(ii) *Pro zafixované* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *s kompaktním nosičem je operace* $T \mapsto T \star G$ *spojité zobrazení* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Pro zafixované* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je operace* $G \mapsto T \star G$ *spojité zobrazení distribucí z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *s nosiči obsaženými ve společné kompaktní množině do* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak existuje* $T \star G_\eta$ *a jedná se o regulární temperovanou distribuci reprezentovanou funkcí* $h \in \Theta_M$. *Navíc platí*

$$\langle T \star G_\eta, \varphi \rangle = \langle T, \eta(-x) \star \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta(-x) \star \varphi := \int_{\mathbb{R}^N} \eta(y-x)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$, *a existuje* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *takové, že pro všechna* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí (*C *závisí na* α*)*

$$D^\alpha (T \star G_\eta) = T_{D^\alpha h} \quad \text{a} \quad |D^\alpha h(x)| \le C \|T\|_{\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)} (1+|x|^2)^m \|\eta\|_{\mathcal{S}^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^N)}.$$

Opakování V

Věta (10 O hustotě regulárních distribucí V 24.3.22)

V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ jsou husté regulární distribuce reprezentované funkcemi z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

23.4 Neceločíselné derivace. Fourierova transformace vybraných temperovaných distribucí I

Definice (9 Distributivní primitivní funkce řádu λ D 24.4.1)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_\lambda := G \star H_{\chi_+^{\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní primitivní funkcí* řádu λ k distribuci G.

Definice (10 Distributivní derivace řádu λ D 24.4.3)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_{-\lambda} := G \star H_{\chi_+^{-\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní derivací* řádu λ distribuce G a značíme ji $D^\lambda G$.

Věta (14 O vlastnostech distributivní derivace řádu λ V 24.4.4)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak

$$D^\alpha(D^\beta G) = D^\beta(D^\alpha G) = D^{\alpha+\beta} G.$$

23.4 Neceločíselné derivace. Fourierova transformace vybraných temperovaných distribucí I

Definice (9 Distributivní primitivní funkce řádu λ D 24.4.1)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_\lambda := G \star H_{\chi_+^{\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní primitivní funkcí* řádu λ k distribuci G.

Definice (10 Distributivní derivace řádu λ D 24.4.3)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_{-\lambda} := G \star H_{\chi_+^{-\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní derivací* řádu λ distribuce G a značíme ji $D^\lambda G$.

Věta (14 O vlastnostech distributivní derivace řádu λ V 24.4.4)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak

$$D^\alpha(D^\beta G) = D^\beta(D^\alpha G) = D^{\alpha+\beta} G.$$

23.4 Neceločíselné derivace. Fourierova transformace vybraných temperovaných distribucí I

Definice (9 Distributivní primitivní funkce řádu λ D 24.4.1)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_\lambda := G \star H_{\chi_+^{\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní primitivní funkcí* řádu λ k distribuci G.

Definice (10 Distributivní derivace řádu λ D 24.4.3)

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je libovolná distribuce s nosičem v $(0, \infty)$. Pak distribuci

$$G_{-\lambda} := G \star H_{\chi_+^{-\lambda-1}}$$

nazýváme *distributivní derivací* řádu λ distribuce G a značíme ji $D^\lambda G$.

Věta (14 O vlastnostech distributivní derivace řádu λ V 24.4.4)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *a* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *je libovolná distribuce s nosičem v* $(0, \infty)$. *Pak*

$$D^\alpha(D^\beta G) = D^\beta(D^\alpha G) = D^{\alpha+\beta} G.$$

Definice (11 Prostory $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}$ D 24.5.1)

(i) Symbolem $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(ii) Symbolem $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že platí $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(iii) Značí-li $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ množinu všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}$, pak zavádíme množinu $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ jako množinu funkcí $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pro které existuje $a > 0$ s následující vlastností: pro každá $q, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $c > 0$ takové, že

$$(1 + |p|)^q |F^{(l)}(p)| \leq c\mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} p|} \qquad \text{pro všechna } p \in \mathbb{C}.$$

Věta (15 Paley–Wienerova věta V 24.5.4)

Pro každou funkci $F \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujme funkci $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)\colon p \in \mathbb{C} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p)$ předpisem

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi px}\,\mathrm{d}x.$$

Pak zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ zobrazuje množinu $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na množinu $\mathcal{Z}$.

23.5 Paley–Wienerova věta. Fourierova transformace (klasických) distribucí I

Definice (11 Prostory $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}$ D 24.5.1)

(i) Symbolem $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(ii) Symbolem $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že platí $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(iii) Značí-li $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ množinu všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}$, pak zavádíme množinu $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ jako množinu funkcí $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pro které existuje $a > 0$ s následující vlastností: pro každá $q, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $c > 0$ takové, že

$$(1 + |p|)^q |F^{(l)}(p)| \leq c \mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} p|} \qquad \text{pro všechna } p \in \mathbb{C}.$$

Věta (15 Paley–Wienerova věta V 24.5.4)

Pro každou funkci $F \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujme funkci $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)\colon p \in \mathbb{C} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p)$ předpisem

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p) := \int_{\mathbb{R}} F(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi px} \, \mathrm{d}x.$$

Pak zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ zobrazuje množinu $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na množinu $\mathcal{Z}$.

Důsledek (3 Důsl. 24.5.6)

Zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}$ definované v poznámce uvedené výše zobrazuje prostor $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na prostor $\mathcal{Z}$ a zobrazení $\mathcal{F}$ definované tamtéž, chápáno jako zobrazení $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, je k němu inverzní.

Definice (12 Konvergence na $\mathcal{Z}$ D 24.5.7)

Nechť $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}$ a $G \in \mathcal{Z}$. Píšeme $G_k \to G$ v $\mathcal{Z}$, jestliže

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G_k) \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G) \qquad \text{v } \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Důsledek (3 Důsl. 24.5.6)

Zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}$ definované v poznámce uvedené výše zobrazuje prostor $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na prostor $\mathcal{Z}$ a zobrazení $\mathcal{F}$ definované tamtéž, chápáno jako zobrazení $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, je k němu inverzní.

Definice (12 Konvergence na $\mathcal{Z}$ D 24.5.7)

Nechť $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}$ a $G \in \mathcal{Z}$. Píšeme $G_k \to G$ v $\mathcal{Z}$, jestliže

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G_k) \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G) \qquad \text{v } \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Definice (13 Prostor $\mathcal{Z}'$ D 24.6.1)

Prostor $\mathcal{Z}'$ definujeme jako prostor všech spojitých funkcionálů nad $\mathcal{Z}$ (vzhledem k výše zavedené konvergenci na $\mathcal{Z}$).

Definice (14 Fourierova transformace nad $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ D 24.6.2)

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{Z}'$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{Z}.$$

23.6 Fourierova transformace na prostorech $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$ I

Definice (13 Prostor $\mathcal{Z}'$ D 24.6.1)

Prostor $\mathcal{Z}'$ definujeme jako prostor všech spojitých funkcionálů nad $\mathcal{Z}$ (vzhledem k výše zavedené konvergenci na $\mathcal{Z}$).

Definice (14 Fourierova transformace nad $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ D 24.6.2)

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{Z}'$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{Z}.$$