Početní část zkoušky 29.5.2023

Jméno:

Skupina:

1. (17b) Sečtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \text{a} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$
pomocí aplikace výsledků teorie trigonometrických řad.

   Návod: Nalezněte rozvoj funkcí $f(x) = x$ a $f(x) = x^2$ zúžených na $(-\pi, \pi)$. Vyšetřete konvergenci příslušných řad. Pro tyto řady aplikujte Parsevalovu rovnost.

2. (20b) V závislosti na parametrech a, $b \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu (v Lebesgueově či Newtonově smyslu i ve smyslu hlavní hodnoty)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+b)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$
Pomocí reziduové věty spočtěte tento integrál pro $b \geq 0$ a odpovídající hodnoty parametru a. Nezapomeňte na speciální hodnoty parametru a!

3. (13b) Spočtěte $\left((x \in \mathbb{R}) \mapsto \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)$
$$\mathcal{F}\Big(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\Big).$$
V jakém smyslu Fourierovu transformaci počítáte? Okomentujte!

4. (10b) Nalezněte řešení konvoluční rovnice (tedy nalezněte temperovanou distribuci G)
$$T_H * G = \delta.$$
Řešte nejprve formálně, za předpokladu, že konvoluce existuje a platí příslušné věty o Fourierově transformaci, po získání výsledku vysvětlete, že postup šlo využít; speciálně vysvětlete, že konvoluce má smysl a že její Fourierova transformace má očekávaný tvar, který má smysl v temperovaných distribucích.