1 Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

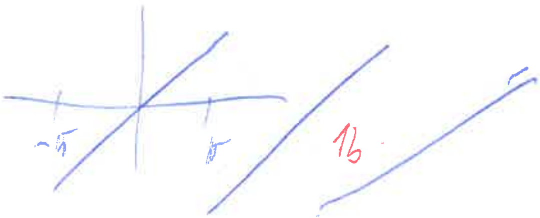
17,5

## Návod

Nalezněte F.ř. (dle kosinového/sinového rozvoje) funkcí $f_1(x)=x$ a $f_2(x)=x^2$ na $(-\pi,\pi)$. Pro tyto řady (vyšetřete jejich konvergenci) použijte Parsevalovu rovnost (odůvodněte pozorně) a ~~jejich konvergence~~ (někde) dosaďte (vhodné) x. (Postup není jediný možný, ale je nejrychlejší.)

## ~~Ř~~ Řešení

$f_1(x)=x$ na $[-\pi,\pi]$



1b

Tedy $a_k=0$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ 1b

$$b_k=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right.$$

1b

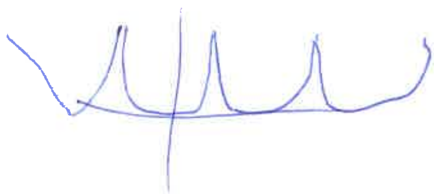
$$=\underbrace{\frac{-2}{k}(-1)^k}+0$$ 1b

$$\boxed{f_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx)}$$ 1b

řada konv. v $L^2$ a bodově na $(-\pi,\pi)$ k fci $f(x)=x$ 1b

$f_2(x)=x^2$ .. sudá

Tedy $b_k=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$ 1b



1b

$$b_0=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$ 1b

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2x\,\frac{\sin(kx)}{k}\,dx\right)$$

1b

$$= -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx = -\frac{4}{k\pi}\left(\left[x\cdot -\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right)$$

1b

$$= \boxed{4\frac{(-1)^{k}}{k^2}}$$

konvergence: stejnoměrná na $\mathbb{R}$ ale $L^2((-\pi,\pi))$

1b

Podle toho $x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$ na $[-\pi,\pi]$

1b

(i mimo pro $2\pi$-per. prodloužení)

(bodově i v $L^2$)

Aplikuji Parsevalovu rovnost, protože $\left(\|\sin(kx)\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \|\cos(kx)\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \sqrt{\pi} \quad k\in\mathbb{N}\right.$, $\left.\|1\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \sqrt{2\pi}\right)$ 1b

$$\|x\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cdot\pi \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3 = \cancel{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$ 1b

$$\|x^2\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{9}\pi^4\cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}\cdot\pi \Rightarrow \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx}_{\frac{2}{5}\pi^5} = \frac{2}{9}\pi^5 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}$$ 1b

$$\frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right)\pi^4 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

$$\frac{8}{16\cdot 45}\pi^4 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

$$\boxed{\frac{1}{90}\pi^4 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}}$$ 1b

(2) ~~Vhodná aplikace~~

206 V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)(x^2+1)}\,dx$$

(v zob. Newtonově a pv. / i ve smyslu hlavní hodnoty).

Pomocí reziduové věty pak integrál spočtěte pro případ $b \geq 0$

## Řešení

a) Je-li $b < 0$ integrál konverguje ve smyslu hlavní hodnoty. 2b

Pro jeho existenci je třeba $-1 < a < 2$ (chování $0$ a $\infty$)

b) Je-li $b = 0$, jde o integrál (v zob. i v Newtonově smyslu) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\,dx$. Ten konverguje pro $0 < a < 2$ 2b

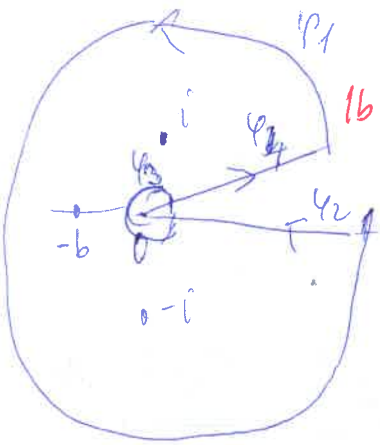
c) Je-li $b > 0$, jde ~~o integrál~~ jen o chování v $0$ a $\infty$ a celkově platí konv./zob. 1b

$-1 < a < 2$.

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}_i f(z) + \mathrm{Res}_{-i} f(z)\right]$$

+ pouze $2\pi i$ Res 2b

Integrační cesta vypadá následovně




$\varphi_1 = Re^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\varphi_2 = t$ $\quad t \in [R, \varepsilon]$

$\varphi_3 = \varepsilon e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ („$\operatorname{Im} z < 0$")

$\varphi_4 = t$ $\quad t \in [\varepsilon, R]$ („$\operatorname{Im} z > 0$")

$$f(z) = \frac{z^a}{(z+b)(z^2+1)}$$ 2b

$$\int_{\varphi_4} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to0^+\\ R\to\infty}]{} \int_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)(x^2+1)}\,dx$$

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to0^+\\ R\to\infty}]{} -e^{ia2\pi}\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)(x^2+1)}$$

2b

$$\int_{\varphi_1} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad \text{(Jordan)}$$

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 0$$

(Jordanovo)

Řešení úloh ($b=0$) ~~(případ již řešili $a\to 1$)~~

odpovídá 1b ≙ 1 residuum → výsledek počítat 1 resp. 2b.

b) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\,dx$

$$I(1-e^{ia2\pi}) = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}\right) + 2\pi i\, \mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}\right) \quad 1b$$

$$= 2\pi i\, \frac{e^{i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{2i} + 2\pi i\, \frac{e^{+i(a-1)\frac{3\pi}{2}}}{-2i}$$

$$= -\pi i\, \left(e^{ia\frac{\pi}{2}} + e^{+ia\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= -\pi i\, e^{ia\frac{\pi}{2}}\left(1+e^{+ia\pi}\right)$$

$$I = \frac{-\pi i\, e^{ia\frac{\pi}{2}}}{1- e^{ia\pi}} = \frac{-\pi i}{e^{-ia\frac{\pi}{2}} - e^{ia\frac{\pi}{2}}} = \boxed{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin a\frac{\pi}{2}}} \quad 2b$$

$b>0$

$$1b$$

c) $$I(1-e^{i2a\pi}) = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i\, \frac{z^a}{(z^2+1)(z+b)} + 2\pi i\, \mathrm{Res}_{-i}\, \frac{z^a}{(z^2+1)(z+b)} + 2\pi i\, \mathrm{Res}_{-b}\, \frac{z^a}{(z^2+1)(z+b)}$$

$$= 2\pi i\, \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{2i\,(i+b)} + 2\pi i\, \frac{\cancel{e^{-ia\frac{\pi}{2}}}\; e^{\frac{3\pi}{2}ai}}{-2i\,(-i+b)} + 2\pi i\, \frac{(-b)^a}{b^2+1} \quad 1b$$

$$= \pi\, \frac{(-i+b)\,e^{ia\frac{\pi}{2}}}{1+b^2} - \pi\, \frac{e^{3ia\frac{\pi}{2}}(i+b)}{1+b^2} + 2\pi i\, \frac{e^{i\pi a}\cdot b^a}{b^2+1}$$

$$= \frac{\pi}{1+b^2}\left( b\left(e^{ia\frac{\pi}{2}} - e^{3ia\frac{\pi}{2}}\right) - i\left(e^{ia\frac{\pi}{2}} + e^{3ia\frac{\pi}{2}}\right) + 2i\, b^a e^{i\pi a}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{1+b^2}\left(\frac{b e^{ia\frac{\pi}{2}}}{1+e^{ia\pi}} - \frac{i\, e^{ia\frac{\pi}{2}}}{1-e^{ia\pi}} + \frac{2i\, b^a}{e^{-ia\pi}-e^{ia\pi}}\right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{1+b^2}\left(\frac{b}{2}\,\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{a\pi}{2}} - \frac{b^a}{\sin(a\pi)}\right)} \quad 3b \quad (\text{je spojité pro } b\to 0^+)$$

Pro $a=1$, $a=0$ je nutné vzít $\lim_{a\to 1}(\,) = \cancel{\frac{b\ln b}{\pi}}\;\cancel{\frac{\pi}{1+b^2}}\; \underline{\frac{\pi}{1+b^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{b\ln b}{\pi}\right)}$ 1b

$$\lim_{a\to 0}(\,) = \underline{\frac{\pi}{1+b^2}\left(\frac{b}{2} + \frac{2\ln b}{\pi}\right)} \quad 1b$$

(3) V jakém smyslu lze spočítat $\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)$?

13b

Proveďte výpočet.

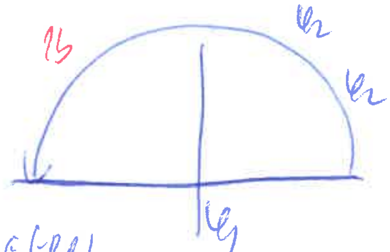
Řešení

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} \sim 0 \text{ pro } x \to ? \qquad \sim \frac{1}{x} \text{ pro } |x| \to \infty \implies \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \notin L^1(\mathbb{R}),\ \in L^2(\mathbb{R})$$ 2b

a tedy lze počítat Fourierovu transformaci jako $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3}{(1+x^2)^2} e^{-2\pi i x\xi}\,dx$. 1b

Výpočet provedeme dle Reziduové věty. Protože případ je lichý, stačí zvolit postup pro $\xi < 0$ a liché prodloužení - Jordan

1b



1b

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_2} \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i z\xi}\,dz = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_1} \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i z\xi}\,dz = \mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)$$ 1b

1b $\varphi_1(t) = t,\ t \in [-R,R]$

$\varphi_2(t) = Re^{it}\ t \in (0,\pi)$

$$\int_{\varphi_1+\varphi_2} = \text{Rez. věta} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{-2\pi i z\xi}$$ 1b

2b

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right) = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{z^3}{(1+z^2)^2} e^{()} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{z^3}{(z+i)^2(z-i)^2} e^{()}$$

1b

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \left(\frac{z^3}{(z+i)^2} e^{()}\right)'\Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\left(\frac{3z^2}{(z+i)^2} - \frac{2z^3}{(z+i)^3}\right) e^{-2\pi i z\xi} - 2\pi i\xi\, e^{-2\pi i z\xi} \frac{z^3}{(z+i)^2}\right)\Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \left(\left(\frac{-3}{-4} - \frac{2i}{8i}\right) e^{2\pi\xi} - 2\pi\xi\, e^{2\pi\xi} \frac{i^3}{(2i)^2}\right)$$

$$= \pi i e^{2\pi\xi} + 4\pi^2\xi\, e^{2\pi\xi} \frac{i}{4}$$

$$= \underline{i e^{2\pi\xi} (\pi + \pi^2\xi)}$$ 2b

Tedy $\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right) = i e^{-2\pi|\xi|}(-\pi \operatorname{sgn}\xi + \pi^2\xi)$ 1b

(3) Nalezněte řešení konvoluční rovnice

(10b) $T_H * G = \delta$.

Rozbor úlohy: Porovnáním rovnic vynásobíme, proto na dané konvoluci aplikujeme pak na obě strany rovnice F.T.

## Řešení

Použijeme tabulky (ze předpokladu F)

$F(T_H)\, F(G) = F(\delta)$ 1b

$\left(\frac{1}{2\pi i} T_{p.v.\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\delta_0\right) F(G) = T_1$ 2b

$F(G)$ lze nalézt tak, že a) z $T_{p.v.\frac{1}{x}}$ dostane $T_1$
b) z $\delta_0$ dostane $T_0$ 2b

Tedy lze ze vzorce $F(G) = 2\pi i \delta$

Proto (opět použitím tabulky)

$\boxed{G = D\delta}$ 1b

Konvoluce má smysl — neboť $G$ má kompaktní nosič
(a navíc $D^n\delta * G = D^n G$ $\forall G \in \mathcal{D}'$). 2b

Násobení F.T. má také smysl ($2\pi i \delta \in \mathcal{O}_M$)

$\langle \delta_1, x\rangle = 0$

$\langle T_{p.v.\frac{1}{x}}, \varphi\rangle = p.v.\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1\cdot\varphi(s)\,ds$. 2b