Cvičení PDR

Transportní rovnice, PDR 1. řádu

Uvažujme $\vec{v} = \vec{v}(t,x) : \underbrace{[0,T]}_{\text{časový interval}} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dané vektorové pole

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená souvislá množina (oblast), kde je $\vec{v}$ dobře definováno

Mějme nějaké částice (např. barviva či něco podobného) v čase $t=0$ v bodě $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in \Omega$; ~~které~~ ta se pohybují v poli $\vec{v}$ po trajektorii

(1) $\quad \vec{x}(t, x^0) : [0,T] \to \Omega$ tak, že $t \in [0,T]$ přiřadí $x \in \Omega$, kde

(2) $\quad \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$, neboli $\dfrac{\partial \vec{x}(t,x^0)}{\partial t} = \vec{v}(t, \underbrace{\vec{x}(t,x^0)}_{x})$

Částice transportují nějakou veličinu (hustota, koncentrace, náboj apod.). Označme ji u. Pokud lze zanedbat ostatní fyzikální mechanismy (zdroje veličiny, difúzi atd.), pak se hodnota u podél trajektorie nemění, tedy

$$0 = \frac{d}{dt}\, u(t, \vec{x}(t,x^0))$$

Aplikací řetízkového pravidla máme

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{x}(t,x^0)) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \vec{x}(t,x^0)) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}(t,x^0)$$

Tedy

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (\vec{v} \cdot \nabla u)(t,x) = 0 \qquad (3)$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ ... tzv. transportní operátor

Tedy hustota částic v daném vektorovém poli splňuje rovnici (2) - (ODR). Vidíme, že je to daná hustota transportovaná, řeší rovnici (3). Pokud zadáme počáteční podmínku, pak dostáváme PDR 1. řádu

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = 0 & \text{na } (0,T) \times \Omega \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0 & \text{v } \Omega \end{cases}$$

Pokud navíc máme zdrojový člen, tj. $\frac{d}{dt} u(t, x(t,x^0)) = f$, pak dostáváme nehomogenní verzi (4), tj.

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = f & \text{na } (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) = u_0 & \text{na v } \Omega. \end{cases}$$

Dříve než si ukážeme řešení úloh (4) a (5) alespoň pro (speciální případy), podívejme se na pojmy (5) obecněji. (4) resp. (5) je speciální případ PDR 1. řádu

$\boxed{\text{Definice (PDR 1. řádu)}}$

Mějme $F : \underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\cap}{\Omega}} \times \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$. Hledejme řešení úlohy

$$F\left(x_1, \dots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = 0, \quad \text{zkráceně } F(x, u, \nabla u) = 0.$$

Př. Transportní rovnice

$$F(t, x_1, \dots, x_N, \overset{\frac{\partial u}{\partial t}}{z_0}, \overbrace{z_1 \dots z_N}^{\frac{\partial u}{\partial x_i}}) := z_0 + \sum_{i=1}^{N} v_i(t,x) z_i - f(t,x)$$

Speciální případy

a) Kvazilineární PDR 1. řádu

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x_1,\dots,x_N,u)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = f(x,u) \qquad (6)$$

b) Nehomogenní lineární PDR 1. řádu

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + a_{N+1}(x)\,u(x) = f(x) \qquad (7)$$

c) Homogenní lineární PDR 1. řádu

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = 0 \qquad (8)$$

Uvědomme si, že jsme odvodili homogenní transportní rovnici (4) a zobecnění tedy jsou případy výrazu (8).

Předpokládejme, že $\forall x\in\Omega$ je $\sum_{k=1}^{N}|a_k(x)| > 0$ $\forall x\in\Omega$.

__Definice__ (Charakteristická rovnice, charakteristika)

Uvažujme rovnici (8). Potom systém ODR 1. řádu

$$(9) \qquad \frac{dx_i}{ds} = a_i(x) \qquad i=1,2,\dots,N$$

nazýváme charakteristickou rovnicí (8). Každé řešení (9) $x_i = \varphi_i(s)$, $i=1,\dots,N$, se nazývá charakteristikou (8).

Platí následující věta

__Věta 1__ (o existenci řešení (8))

Nechť $a_1(x),\dots,a_N(x)$ jsou v oblasti Ω spojité. Potom je jednoznačně spojitě diferencovatelná funkce $u(x_1,\dots,x_N)$ řešením rovnice (8) $\Longleftrightarrow$

„u" je konstantní podél každé charakteristiky rovnice (8), tedy $u(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s))$ je konstantní (jako funkce parametru s)

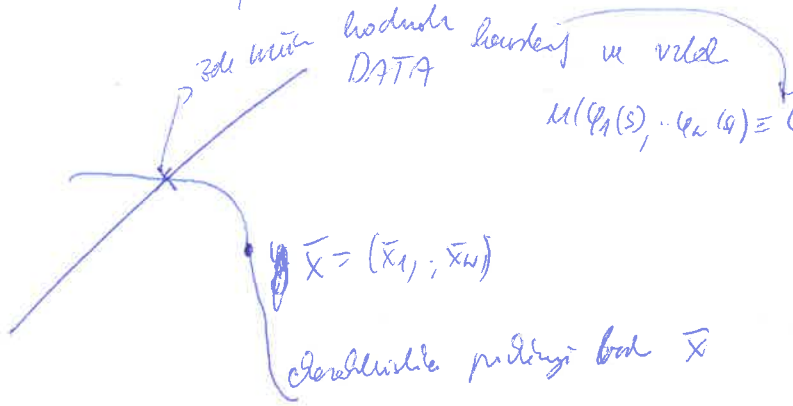
pro všechna řešení $\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)$ systému (9). QED

Idea důkazu

Počítejme $\frac{d}{ds}\left(u(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i}{ds}$.

Jestliže je $u(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))$ konstantní podél řešení (9), pak $u(x_1, \dots, x_n)$ řeší (8).

Pozn.
Pokud chceme řešit rovnici (8) a zadat na nějaké ~~ploše~~ množině podmínky pro řešení u, pak tato množina nemůže být charakteristikou



hodnoty konstantní u vlastně

$u(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) \equiv \text{const} \Rightarrow$ známe hodnotu řešení v libovolném bodě $\bar{x}$

Nelze ale zadávat data na charakteristikách, neboť bychom dostali nesprávnou úlohu! Data musíme zadávat na necharakteristických ~~plochách~~ množinách

Pozn.

Všimněme si ještě, že pokud $u(x)$ řeší naši rovnici (8), pak i $w(u(x))$ řeší takovou rovnici, kde w je libovolná C^1-funkce, $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Podívejme se nyní na transportní rovnici pro případ $N=1$, kdy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + b\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \qquad (10)$$

splňující počáteční podmínku

$$u(0,x) = u_0(x).$$

$b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, u_0 je C^1-funkce definovaná na $\mathbb{R}$.

Podle výše uvedeného hledáme řešení

$$\frac{d\varphi_0}{ds} = 1, \qquad \frac{d\varphi_1}{ds} = b \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = s + t_0, \quad \varphi_1 = bs + x_0$$

a řešení je funkce $u = u(\underbrace{s+t_0}_{t}, \underbrace{bs+x_0}_{x})$ splňující $\frac{du}{ds} = 0$ na každém řešení ODR.

Tedy řešení je $\omega(\cancel{bt-x}\; x-bt)$, kde $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokud chceme navíc splnit přídavnou podmínku, pak $\omega(x) = u_0(x) \Rightarrow$ řešení je $u_0(x-bt)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Toto řešení se nazývá putující vlna („travelling wave").

Pokud uvážíme vícedimenzionální případ, kdy rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u = 0$$

(11) $\quad u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0 \qquad u = u(t,x),$

dostáváme opět systém ODR

$$\frac{d\varphi_0}{ds} = 1, \qquad \frac{d\varphi_i}{dx_i} = b_i \quad i = 1,\dots,N \quad \Rightarrow \quad \varphi_0(s) = s + t_0, \quad \varphi_i(s) = b_i s + x_i^0 \quad i = 1,2,\dots,N.$$

Řešení je tedy $u(t,x)$, které splňuje

$$\frac{d}{ds}\, u(s+t_0, b_1 s + x_1^0, \dots, b_N s + x_N^0) = 0$$

Obecné řešení problému (11) N lineárně nezávislých řešení, které lze brát

$$z_1 = z_1(-b_1 t + x_1)$$
$$\vdots$$
$$z_N = z_N(-b_N t + x_N)$$

(pokud $t := s + t_0$, $x_i = b_i s + x_i^0$, je $z_i(-b_i(s+t_0) + b_i s + x_i^0) = \text{const}$)

Nebudeme se zabývat přesnou definicí, co je LN, ale uvidíme, že příklad řešení lze zapsat i jako

$u(t,x) = z(-b_1 t + x_1, \dots, -b_N t + x_N) = z(-\vec{b} \cdot t + x)$, kde z je vhodná

C^1-funkce $: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Dosazením $t=0$ dostáváme

$$\underset{u_0(x)}{\underbrace{u(0,x)}} = z(x) \Rightarrow u(t,x) = u_0(x - \vec{b} t) \text{ řeší naši úlohu.}$$

(všimněte si, že plochy $t = \text{const}$ nejsou charakteristické)

Nebudeme si ukazovat důkaz, jak hledat obecné řešení rovnice ve tvaru pro $N+1$ neznámých proměnných, ale uvedeme si další způsoby řešení (11):

a) Geometrický úvod

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \cdot (1, b_1, \dots, b_N) = 0$$

$$\nabla_{t,x} u \cdot (1, \vec{b}) = 0$$

$\Rightarrow$ časoprostorová derivace ve směru $(1,\vec{b})$ je nulová $\Rightarrow$ u je podél vektoru $(1,\vec{b})$ konstantní. Přímka procházející bodem (t_0, x_0) se směrem $(1,\vec{b})$ má tvar

$$(t - t_0)\vec{b} = x - x_0$$

Pro $t=0$ se nachází v bodě $x - x_0 = -t_0\vec{b}$ $\Rightarrow$ $u(t_0, x_0) = u_0(x_0 - t_0\vec{b})$ $\Rightarrow$

$$\underline{u(t,x) = u_0(x - t\vec{b})}$$

b) Fourierova transformace

Připomeňme $\mathcal{F}(u)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\, e^{-2\pi i (x,\xi)}\, dx$,

tedy $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u)(t,\xi) + 2\pi i (\xi, \vec{b})\, \mathcal{F}(u)(t,\xi) = 0$

$$\mathcal{F}(u)(0,\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{F}(u)(t,\xi)\, e^{2\pi i (\xi,\vec{b})t} \right) = 0$$

$$\mathcal{F}(u)(t,\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi)\, e^{-2\pi i (\xi,\vec{b})t}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)(t,\xi))(x) = \int_{\mathbb{R}^N}}$$

$$\mathcal{F}(u)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, e^{-2\pi i (x,\xi)}\, e^{-2\pi i (\xi,\vec{b})t}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, e^{-2\pi i (\xi, \overbrace{x+\vec{b}t}^{y})}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y-\vec{b}t)\, e^{-2\pi i (y,\xi)}\, dy$$

$$= \mathcal{F}(u_0)(\xi-\vec{b}t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = u_0(x-\vec{b}t)}$$

Řešení je jednoznačné – každým bodem prochází právě jedna charakteristika, na ní je řešení konstantní.

Úplně na závěr si všimněme, že pokud hledáme řešení

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla u = f \qquad (12)$$

$$u(0,x) = u_0,$$

$u(t,x) = u_0(x-\vec{b}t)$ má splňuje poč. podmínku a rovnici s $f=0$. Stačí tedy nalézt takové řešení úlohy s nehomogenní f, které je nulové v $t=0$. To splňuje třeba

$$u_1(t,x) = \int_0^t f(s, x+(s-t)\vec{b})\, ds$$

(nulovost v $t=0$ je zřejmá, pokud je f třídy $C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$, tak

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla u_1 = f(t,x) + \int_0^t \left[-\vec{b}\cdot\nabla_x f(s, x+(s-t)\vec{b}) + \vec{b}\cdot\nabla_x f(s, x+(s-t)\vec{b})\right] ds$$

$$= f(t,x)$$

Celkem tedy je řešení úlohy (12) na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$

$$u(t,x) = u_0(x-t\vec{b}) + \int_0^t f(s, x+(s-t)\vec{b})\, ds,$$

pokud $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $f \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$.