Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 12.10.2023

24.2 Rovnice vedení tepla (rovnice parabolického typu)
24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla I

Věta (2 O fundamentálním řešení rovnice vedení tepla)

Distribuce T_u, kde u je dáno vztahem

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N,$$

řeší rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= \delta_0 && \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla II

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Věta (3 O řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou)

Nechť $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že

$$|u_0(x)| \le C(1+|x|^2)^m \qquad \text{na } \mathbb{R}^N.$$

Pak funkce

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \,\mathrm{d}y$$

splňuje $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ a distribuce T_u je řešením úlohy (1). Pokud navíc $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a u_0 je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pak

$$\lim_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N \to (0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0).$$

24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla II

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{na } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\
u(0, x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Věta (3 O řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou)

Nechť $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že

$$|u_0(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m \qquad \textit{na } \mathbb{R}^N.$$

Pak funkce

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

splňuje $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ a distribuce T_u je řešením úlohy (1). Pokud navíc $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a u_0 je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pak

$$\lim_{(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \to (0, x_0)} u(t, x) = u_0(x_0).$$

24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla III

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\
u(0,x) = 0 \qquad & \text{na } \mathbb{R}^N
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Věta (4 O řešení rovnice vedení tepla s netriviální pravou stranou)

Nechť $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp} F \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ je taková temperovaná distribuce, že $T_U \star F$ je definováno. Potom $T_U \star F$ řeší úlohu (2) s pravou stranou $f = F$ ve smyslu temperovaných distribucí (přesná formulace je uvedena níže v důkazu).
Speciálně, je-li $F = T_f$, $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f \in C_1^2([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ a f má funkční hodnoty, všechny parciální derivace prvního řádu a všechny prostorové parciální derivace druhého řádu omezené na $[0,T] \times \mathbb{R}^N$, pak funkce zadaná předpisem (pro $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^N$)

$$u(t,x) := \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\,\mathrm{d}\lambda_{N+1}(s,y)$$

splňuje $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N)$, řeší úlohu (2) v klasickém (bodovém) smyslu a pro každé $\tau_0 \in (0,T]$ platí

$$\sup_{(0,\tau_0)\times\mathbb{R}^N} |u| \le \tau_0 \sup_{(0,\tau_0)\times\mathbb{R}^N} |f|.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla I

Označení

Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otevřená a $0 < T < \infty$ definujme parabolický válec $Q_T := (0, T] \times \Omega$ a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T$ jeho parabolickou hranici. Konečně pro $(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ označme jako tepelnou kouli množinu

$$E(t, x; r) := \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : s < t, U(t - s, x - y) \geq \frac{1}{r^N}\right\},$$

kde $U(t, x)$ je fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Věta (5 O střední hodnotě pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q_T})$ řeší na Q_T rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Potom

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^N} \int\int_{E(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{|t - s|^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \qquad \text{pro všechna } E(t, x; r) \subset Q_T.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla I

Označení

Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otevřená a $0 < T < \infty$ definujme parabolický válec $Q_T := (0, T] \times \Omega$ a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T$ jeho parabolickou hranici. Konečně pro $(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ označme jako tepelnou kouli množinu

$$E(t, x; r) := \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : s < t, U(t - s, x - y) \geq \frac{1}{r^N}\right\},$$

kde $U(t, x)$ je fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Věta (5 O střední hodnotě pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q_T})$ řeší na Q_T rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Potom

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^N} \int\int_{E(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{|t - s|^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \qquad \textit{pro všechna } E(t, x; r) \subset Q_T.$$

24.2.2 Princip maxima a jeho důsledky pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla II

Věta (6 Princip maxima pro rovnici vedení tepla)

Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C_0^0(\overline{Q}_T)$ *řeší v* Q_T *rovnici* $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$*.*
(i) *Je-li* Ω *omezená, platí* $\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$*.*
(ii) *Je-li* Ω *souvislá (ne nutně omezená) a existuje* $(t_0, x_0) \in Q_T$ *takové, že platí* $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q}_T} u$*, potom je* u *konstantní na* $\overline{Q}_{t_0}$*.*