Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 26.10.2023

24.2.3 Okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla I

Věta (9 Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla)

Existuje nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla.

Věta (10 O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro rovnici vedení tepla)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Pak pro každou z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^\infty((0,T_0)\times\Omega) \qquad \textit{pro všechna } i \in \{1,\dots,N\} \textit{ a každé } T_0 \in (0,T) \tag{1}$$

a

$$x \mapsto u(t,x), x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x), x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \qquad \textit{pro všechna } i \in \{1,\dots,N\} \textit{ a každé } t \in (0,T). \tag{2}$$

24.2.3 Okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla I

Věta (9 Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla)

Existuje nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla.

Věta (10 O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro rovnici vedení tepla)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Pak pro každou z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^\infty((0, T_0) \times \Omega) \qquad \text{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \text{ a každé } T_0 \in (0, T) \tag{1}$$

a

$$x \mapsto u(t,x), x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x), x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \qquad \text{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \text{ a každé } t \in (0, T). \tag{2}$$

24.2.3 Okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla II

Lemma (1 O třech Fourierových transformacích)

Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *je distribuce s nosičem v intervalu* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *a* $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *značí funkci, která reprezentuje* $\mathcal{F}(T)$. *Označme ještě* $G := T \star \delta_\Sigma$. *Nechť* $h \in L^1(\mathbb{R})$. *Pak existuje* $T_h \star G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *jedná se o regulární distribuci a pro její reprezentující funkci platí*

$$(T_h \star G)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(h)(n)\alpha(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx},$$

přičemž řada napravo konverguje ve smyslu $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.