Úvod do klasické teorie PDR

Milan Pokorný

22. ledna 2025

Kapitola 1

Úvod

Parciální diferenciální rovnice jsou rovnicemi, jejichž řešením jsou funkce. Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic jde o funkce více proměnných, přičemž v rovnicích se vyskytují derivace dle alespoň dvou proměnných.

Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic neexistuje žádná smysluplná obecná teorie parciálních diferenciálních rovnic (kromě jedné věty, která ale požaduje analytická data a dává lokálně řešení na třídě analytických funkcí, což je poměrně slabý výsledek za poměrně silných předpokladů). Tato situace je ale v podstatě věci, a proto je nutné studovat jednotlivé rovnice zvlášť a jak uvidíme později, teorie dává poměrně rozdílné vlastnosti řešení pro různé typy rovnic. My se proto o tuto obecnou teorii pokoušet nebudeme a odkazujeme na monografie jako třeba [ReRo], [Ev PDE] či [Pe] a místo toho se stručně podíváme na dva typy rovnic prvního řádu a poté se budeme věnovat hlavně třem základním typům rovnic řádu druhého.

Parciální diferenciální rovnice popisují různé fyzikální jevy: šíření vln, vedení tepla, proudění tekutin, rovnováhu sil, ale i dynamické změny v elastickém tělese, vývoj pravděpodobnost výskytu elementární částice v různých bodech prostoru či popis celého vesmíru ve smyslu obecné teorie relativity. Parciální diferenciální rovnice mají ale také své použití i v jiných vědních oborech: lékařství, biologie nebo ekonomie. Samozřejmě existují rovnice, které zatím žádnou aplikaci nemají, ale i tak může jejich studium být zajímavé z pohledu matematiky.

My se v tomto úvodu soustředíme na řešení klasická, tedy na ta řešení, která splňují rovnice ve smyslu rovnosti spojitých funkcí. Obecnějším pojmům jako zejména slabým řešením se věnují další kurzy parciálních diferenciálních rovnic na fakultě. Poměrně těžké na tomto kurzu je, že využívá znalostí z různých oborů: matematické analýzy, teorie míry a integrálu a lineární algebry. Pokračování tohoto kurzu pak také potřebuje dobré znalosti z funkcionální analýzy. To je někdy málo populární, ale na druhou stranu právě tato propojenost činí teorii parciálních diferenciálních rovnic krásnou a atraktivní pro nemalou část matematiků. A samozřejmě, propojenost s aplikacemi, a s tím související propojení s numerickou analýzou a numerickým řešením těchto rovnic, činí tuto partii matematiky atraktivní i z dalších důvodů.

1.1 Značení

Pro funkce $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ značíme

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = u_{x_j} = \partial_{x_j} u = \partial_j u$$

(dle kontextu budeme využívat některou z verzí výše). Pro vyšší derivace pak často pracujeme s multiindexovou symbolikou, tedy pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$ a $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ píšeme

$$D^\alpha u = \frac{D^{|\alpha|} u}{D x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

a v tomto kurzu se budeme vždy pohybovat v situaci, kdy jsou tyto derivace záměnné.

Dále budeme pracovat s diferenciálním operátorem gradient

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right),$$

který zobrazuje skalární funkci na vektorovou. Vektorové funkce budeme značit pomocí šipky

$$\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s, \qquad \vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_s)^T$$

(sloupcový vektor), nebo pomocí tučného fontu (pro případ, kdy $s = m$), tedy $\mathbf{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Pro vektorové funkce máme

$$\nabla \vec{f} = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_s)^T,$$

popřípadě lze gradient zapisovat i pomocí matice

$$\nabla \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

V případě, že budeme pracovat s vyššími gradienty, budeme používat značení $\nabla^k u$, $k = 1, 2, \dots$. Ve všech výše i níže uvedených případech budeme vždy předpokládat, že všechny derivace, o kterých mluvíme, skutečně existují v klasickém smyslu.

Pro Ω otevřenou množinu budeme používat značení

$$
\begin{aligned}
C^1(\Omega) &= \{u \in C(\Omega) \,:\, \nabla u \in C(\Omega)\} \\
C^k(\Omega) &= \{u \in C(\Omega) \,:\, \nabla^i u \in C(\Omega), i = 1, 2, \dots, k\} \\
C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega) \\
C(\overline{\Omega}) &= \{u \in C(\Omega) \,:\, u \text{ lze spojitě rozšířit až do hranice } \Omega\} \\
C^k(\overline{\Omega}) &= \{u \in C(\overline{\Omega}) \,:\, \nabla^i u \in C(\overline{\Omega}), i = 1, 2, \dots, k\} \\
C^\infty(\overline{\Omega}) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

Pro vektorovou funkci $\mathbf{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zavádíme

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Zřejmě platí

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \operatorname{Tr}(\nabla\mathbf{f}),$$

tedy divergence je vlastně stopou matice gradientu vektorové funkce pro speciální případ funkce $\mathbf{f}$.

Dalším diferenciálním operátorem, se kterým budeme ale pracovat o poznání méně, je rotace. Budeme ji definovat pouze pro případ vektorové funkce $\mathbf{f}$ na $\mathbb{R}^3$ následovně

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big).$$

Více pak budeme pracovat s Laplaceovým operátorem. Je-li $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\Delta u := \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

pro vektorovou funkci $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ pak

$$\Delta\vec{f} := (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_s)^T.$$

Cvičení 1.1.1. Ukažte, že pro skalární funkci platí

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u),$$

zatímco pro vektorovou funkci $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ máme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{f}) = \nabla \operatorname{div}\mathbf{f} - \Delta\mathbf{f}.$$

1.2 Parciální diferenciální rovnice

Nyní se dostáváme k pojmu parciální diferenciální rovnice.

Definice 1.2.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, je neprázdná oblast (otevřená souvislá množina). Potom parciální diferenciální rovnicí (PDR) n-tého řádu, $n \geq 1$, pro neznámou funkci u: $\Omega \to \mathbb{R}$ nazýváme předpis

$$F\big(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x), \dots, \nabla^n u(x)\big) = 0, \tag{1.2.1}$$

kde F: $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N^n} \to \mathbb{R}$ je daná funkce, která není identicky rovná nule na žádné podmnožině $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N^n}$.

Nechť u: $\Omega \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^n(\Omega)$. Potom říkáme, že u řeší rovnici (1.2.1), jestliže po dosazení x a $u(x)$ do levé strany (1.2.1) platí rovnost identicky pro všechna $x \in \Omega$. Toto řešení nazýváme klasickým řešením rovnice (1.2.1).

Poznámka 1.2.2. Existují i obecnější pojmy řešení: ve smyslu distribucí, slabé řešení, řešení s hodnotami v mírách aj. Slabé řešení bude základem přednášky PDR 1 a 2.

Často hraje jedna proměnná, čas, speciální roli. Pro hledanou funkci pak typicky předepisujeme hodnotu v nějakém čase t_0 a hledáme pouze řešení pro $t > t_0$. Takové rovnice nazýváme evoluční (později to budou například rovnice vedení tepla, vlnová rovnice), pokud rovnice na čase nezávisí, mluvíme o rovnicích stacionárních (později to budou například rovnice Laplaceova a Poissonova). Neznámou funkci pro evoluční rovnice budeme psávat jako $u(t, x)$, tedy čas budeme psát jako první proměnnou.

V tomto semestru se budeme zabývat především rovnicemi lineárními.

Definice 1.2.3. (i) PDR (1.2.1) nazýváme lineární, pokud ji lze psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \tag{1.2.2}$$

pro dané funkce a_α a f. Lineární PDR se nazývá homogenní, je-li $f \equiv 0$. V opačném případě mluvíme o lineární nehomogenní rovnici (popřípadě o rovnici s nenulovou pravou stranou).
(ii) PDR (1.2.1) nazýváme semilineární, pokud ji lze psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f\big(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^{n-1}(x)\big), \qquad x \in \Omega \tag{1.2.3}$$

pro dané funkce a_α a f.
(iii) PDR (1.2.1) nazýváme kvazilineární, pokud ji lze psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha\big(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^{n-1}(x)\big) D^\alpha u(x) = f\big(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^{n-1}(x)\big), \tag{1.2.4}$$

$x \in \Omega$ pro dané funkce a_α a f.
(iv) PDR (1.2.1) nazýváme nelineární, pokud není lineární ve smyslu (i).

Poznámka 1.2.4. Někdy se též mluví o rovnici ryze nelineární; to je situace, kdy je rovnice nelineární v nejvyšších derivacích. Bylo by možné též hovořit o systémech parciálních diferenciálních rovnic, to jde ale nad rámec tohoto kurzu.

Příklad 1.2.5. (i) Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$$

je rovnicí lineární prvního řádu.
(ii) Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial y} + u^2\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y)$$

je rovnicí kvazilineární druhého řádu.
(iii) Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

je rovnicí semilineární druhého řádu.
(iv) Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + u^4\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = u^4$$

je rovnicí nelineární druhého řádu.

Budeme se věnovat následujícím otázkám:

(i) zda *rovnice má řešení* (důležitý je i prostor funkcí, ve kterém má řešení ležet, tento semestr to budou spojitě diferencovatelné funkce), v ideálním případě (pokud je splněn i následující bod) též nalézt explicitní vztah pro toto řešení

(ii) zda *je řešení* na dané třídě funkcí *jednoznačné*; uvidíme i případy, kdy jednoznačnost platit nemusí

(iii) zda řešení závisí spojitě na datech úlohy (pravá strana, počáteční či okrajová podmínka).

Pokud jsou všechny tyto tři body splněny, mluvíme o korektně zadané úloze ve smyslu J. Hadamarda.

Nebudeme teď diskutovat, jaké počáteční/okrajové podmínky musíme předepsat pro dané třídy rovnic, ukážeme si to později pro konkrétní rovnice.

1.3 Oblast s lipschitzovskou a hladkou hranicí. Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky

Nejprve si uvedeme definici oblasti s lipschitzovskou (diferencovatelnou) hranicí, která nám umožní dobře definovat plošný integrál.

Definice 1.3.1 (Oblast s lipchitzovskou hranicí)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Nechť existují čísla α, $\beta > 0$ a M kartézských systémů souřadnic $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_{N-1}}, x_{r_N}) = (x'_r, x_{r_N})$, $r \in \{1, 2, \dots, M\}$ a M funkcí $a_r(x'_r)$ lipschitzovsky spojitých v

$$\Delta_r = \{x'_r : |x_{r_i}| < \alpha, i = 1, 2, \dots, N-1\}, \qquad r = 1, 2, \dots, M$$

a nechť platí

1. pro každé $x \in \partial\Omega$ existuje $r \in \{1, 2, \dots, M\}$ takové, že existuje $x'_r \in \Delta_r$: $T_r(x) = (x'_r, a_r(x'_r))$ (T_r je afinní zobrazení, které bodu v pevné souřadné soustavě přiřadí jeho obraz v souřadném systému (x'_r, x_{r_N}))
2. $V_r^+ = \{(x'_r, x_{r_N}) : a_r(x'_r) < x_{r_N} < a_r(x'_r) + \beta\}$ splňuje $V_r^+ \subset \Omega$
3. $V_r^- = \{(x'_r, x_{r_N}) : a_r(x'_r) - \beta < x_{r_N} < a_r(x'_r)\}$ splňuje $V_r^- \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Potom značíme $\Omega \in C^{0,1}$ a Ω nazýváme oblastí s lipschitozvskou hranicí. Pokud všechny funkce $a_r(x'_r)$ jsou třídy C^k, $k = 1, 2, \dots$, pak značíme $\Omega \in C^k$ a mluvíme o oblastech s k-krát spojitě diferencovatelnou hranicí.

Věta 1.3.2. *Nechť Ω je oblast třídy $C^{0,1}$. Potom s.v. na $\partial\Omega$ (ve smyslu $N-1$ dimenzionální Lebesgueovy míry) existuje normálový vektor.*

Důkaz této věty, který se opírá o to, že lipschitzovsky spojitá funkce má s.v. totální diferenciál, lze nalézt například v knize [Ne] nebo [KJF].

Příklad 1.3.3. (i) Koule $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ je oblast s C^∞ hranicí.

(ii) Čtverec $\Omega = (-1, 1)\times(-1, 1)$ je oblastí s lipchitzovskou hranicí. Analogicky krychle ve vyšších dimenzích.

(iii) Kruh bez průměru $\Omega = B_1(0) \setminus \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$ nemá lipschitzovskou hranici, nejsou splněny body 2. a 3. z Definice 1.3.1.

Pro oblast s alespoň lipschitzovskou hranicí zaveďme následující značení:

$$\Gamma_r = \{(x'_r, x_{r_N}) : a_r(x'_r) = x_{r_N}\}$$
$$V_r = V_r^+ \cup V_r^- \cup \Gamma_r.$$

Potom $\{V_r\}_{r=1}^M$ je otevřené pokrytí $\partial\Omega$ a existuje otevřená množina $V_{M+1} \subset \overline{V_{M+1}} \subset \Omega$ taková, že $\{V_r\}_{r=1}^{M+1}$ je otevřené pokrytí $\overline{\Omega}$. Potom existují funkce $\psi_i \in C_0^\infty(V_i)$ (hladké funkce s kompaktním nosičem ve V_i), $i = 1, 2, \dots, M+1$ takové, že $0 \le \psi_i \le 1$ a platí

$$\sum_{i=1}^{M+1} \psi(T_r(x)) = 1$$

pro všechna $x \in \overline{\Omega}$ a

$$\sum_{i=1}^{M} \psi(T_r(x)) = 1$$

pro všechna $x \in \partial\Omega$. Důkaz lze opět nalézt například v monografiích [Ne] nebo [KJF]. Nyní můžeme definovat (všechny funkce ψ_i jsou dodefinovány nulou vně V_i a funkce $f = 0$ mimo Ω)

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^{M+1} \int_{V_i} f\psi_i \,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_{\partial\Omega} f \,\mathrm{d}S := \sum_{r=1}^{M} \int_{\Gamma_r} (f\psi_i)\big(T_r(x'_r, a_r(x'_r))\big) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a_r(x'_r}{\partial x_{r_i}}\right)^2} \,\mathrm{d}x'_r.$$

Jak víte z přednášky z Geometrie (detaily jsou též v [Ne], [KJF] a popřípadě zavedení plošného integrálu pro hladké oblasti i v [ČePo 3]), tato definice nezávisí na parametrizaci.

Vzhledem k výše uvedeným definicím platí

Věta 1.3.4 (Gauss–Ostrogradskij)**.** *Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Potom platí*

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f n_i \,\mathrm{d}S,$$

respektive pro případ vektorové funkce

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{g} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S.$$

Důkaz této věty pro hladké funkce a oblasti s C^1 hranicí je ve skriptech [ČePo 3], případ méně hladkých oblastí (i funkcí) lze nalézt v [Ne] či [KJF].

Předchozí věta má několik užitečných přímočarých důsledků.

Věta 1.3.5 (Greenovy identity)**.** *Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.*

(i) Nechť funkce $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f g n_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} f \,\mathrm{d}x.$$

(ii) Nechť funkce $f \in C^2(\overline{\Omega})$, funkce $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \Delta f g \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \,\mathrm{d}x.$$

(iii) Nechť funkce $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega (\Delta f g - \Delta g f) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} f\right) \mathrm{d}S.$$

Cvičení 1.3.6. Pomocí Gauss–Ostrogradského věty (Věta 1.3.4) dokažte Greenovy identity z předchozí věty.

Kapitola 2

Parciální diferenciální rovnice 1. řádu. Rovnice transportní a Burgersova

Nejprve se budeme zabývat obecnou lineární a kvazilineární rovnicí 1. řádu, tedy rovnicí

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f, \tag{2.0.1}$$

uvažovanou v $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, přičemž ve smyslu terminologie zavedené v minulé kapitole pro $a_i = a_i(x)$, $f = f(x)$ mluvíme o *rovnici lineární* a pro $a_i = a_i(x, u)$, $f = f(x, u)$ mluvíme o *rovnici kvazilineární*. V celé kapitole budeme předpokládat, že funkce a_i, $i = 1, 2, \dots, N$ i f jsou spojité na odpovídající množině.

2.1 Lineární parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 2.1.1 (Řešení lineární PDR 1. řádu)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, (2.0.1) je lineární PDR 1. řádu. Potom $u \in C^1(\Omega)$ je řešením rovnic (2.0.1) v oblasti Ω, jestliže pro všechna $x \in \Omega$ je splněno

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = f(x).$$

Nejprve se budeme zabývat případem homogenní lineární PDR 1. řádu, tedy rovnicí

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{2.1.1}$$

Budeme předpokládat, že $\sum_{i=1}^{N} |a_i(x)| > 0$ pro všechna $x \in \Omega$, tedy na celé otevřené množině, na které rovnici řešíme.

Definice 2.1.2 (Charakteristický systém, charakteristika)**.** Systém ODR 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = a_i(x(t)), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \Omega \tag{2.1.2}$$

nazýváme charakteristickým systémem rovnice (2.1.1). Libovolné řešení $\varphi_i \in C^1((t_1, t_2))$, $i = 1, 2, \dots, N$ systému ODR (2.1.2) nazýváme charakteristikou rovnice (2.1.1).

Věta 2.1.3 (O ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu)**.** *Funkce $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ je řešením rovnice* (2.1.1) *v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ právě tehdy, když je ψ konstantní podél každé charakteristiky rovnice* (2.1.1).

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť ψ splňuje

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Nechť $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$, $t \in (t_1, t_2)$ je charakteristikou rovnice (2.1.1). Potom

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) a_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) = 0,\end{aligned}$$

tedy ψ je konstantní podél každé charakteristiky.

„$\Leftarrow$“ Nechť je ψ konstantní podél každé charakteristiky. Zvolme libovolný bod $\xi \in \Omega$. Protože funkce $\{a_i\}_{i=1}^N$ jsou spojité v Ω, prochází bodem ξ alespoň jedna charakteristika, odpovídající jistému intervalu (t_1, t_2) (což plyne z Peanovy věty o existenci řešení pro systémy ODR 1. řádu). Fixujme jednu takovou charakteristiku $\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$ a bod $\tau \in (t_1, t_2)$ takový, že platí $(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_N(\tau)) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$. Protože $\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t))$ je konstantní na (t_1, t_2), platí

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) a_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)).\end{aligned}$$

Volbou $t := \tau$ dostáváme, že rovnici (2.1.1) splňuje funkce ψ v bodě $\xi \in \Omega$. Bod ξ je ale libovolný bod množiny Ω, proto funkce $\psi(x)$ řeší (2.1.1) v oblasti Ω. $\square$

Příklad 2.1.4. Hledejme řešení rovnice

$$ay\frac{\partial u}{\partial x} + bx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Charakteristický systém této rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ay, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = bx.$$

Pokud vynásobíme první rovnici bx a druhou ay a vztahy odečteme, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(bx^2 - ay^2\right) = 0,$$

tedy

$$bx^2 - ay^2 = konst.$$

Řešením dané rovnice proto je

$$u(x, y) = U(bx^2 - ay^2),$$

kde $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$.

Cvičení 2.1.5. Nalezněte řešení rovnice

$$\cos y \frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Příklad 2.1.6. (i) Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$ splňující $u(0, y) = \sin y$ pro $y \in \mathbb{R}$. Tato úloha se nazývá Cauchyovou úlohou pro PDR 1. řádu.

Charakteristickým systémem této rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x.$$

Dostáváme tedy

$$x = t + x_0, \qquad y = \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + y_0.$$

Hledáme tedy funkci, konstantní podél $x = t + x_0$, $y = \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + y_0$. Takovou funkcí je

$$u(x, y) = U\left(y - \frac{1}{2}x^2\right),$$

neboť $y - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + y_0 - \frac{1}{2}(t + x_0)^2 = y_0 - \frac{1}{2}x_0^2 = konst$. Tento vztah můžeme také odvodit podobně jako v předchozím příkladu. Vynásobíme-li první rovnici x a odečteme-li od ní druhou rovnici, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right) = 0,$$

tedy opět máme $\frac{1}{2}x^2 - y = konst$. Protože má být $u(0, y) = U(y) = \sin y$, je

$$u(x, y) = \sin\left(y - \frac{1}{2}x^2\right), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$ splňující $u(x, 0) = g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Stejným postupem jako výše získáme

$$u(x, y) = U\left(y - \frac{1}{2}x^2\right) = V(\sqrt{x^2 - 2y}).$$

Protože má být $u(x, 0) = g(x)$, máme

$$u(x, y) = g(\sqrt{x^2 - 2y}). \tag{2.1.3}$$

Tedy na množině $\{(x, y) : y > 0 \wedge x \in (-\sqrt{2y}, \sqrt{2y})\}$ řešení neexistuje, mimo tuto množinu je dáno vztahem (2.1.3), přičemž musíme požadovat, aby funkce g byla sudá; máme totiž $u(x, 0) = V(|x|) = g(|x|)$.

Abychom vyjasnili strukturu prostoru řešení, zobecníme pojem závislosti funkcí, který jsme používali při řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic n-tého řádu (Definice 8.5.3).

Definice 2.1.7 (Závislost funkcí)**.** (i) Funkce $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé na množině $\overline{O}$ (množina O je omezená otevřená), jestliže existuje funkce $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$ taková, že
(I) $F(u_1, u_2, \dots, u_N) \in C^1(\mathbb{R}^N)$
(II) F není v žádné oblasti $G \subset \mathbb{R}^N$ identicky rovná nule
(III) pro všechna $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \overline{O}$ je $F(u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)) = 0$.
(ii) Funkce $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N), u_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé v oblasti Ω, pokud pro každou omezenou podoblast O takovou, že $\overline{O} \subset \Omega$, platí, že funkce $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\dots$, $u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé v $\overline{O}$.

Platí následující ekvivalentní charakterizace závislosti funkcí.

Věta 2.1.8 (Jacobiho kritérium závislosti funkcí)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, $u_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Potom $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ jsou závislé v Ω právě tehdy, když pro všechna $x \in \Omega$ platí*

$$\mathrm{J}_{\mathbf{u}}(x) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix} = 0.$$

Důkaz. Důkaz je poměrně dlouhý a technicky náročný. Lze ho nalézt v [Ka, str. 302–309]. □

Pro případ, kdy je počet funkcí menší než počet proměnných, platí

Věta 2.1.9 (Kritérium nezávislosti funkcí pro menší počet funkcí)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, $u_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \le N$. Potom jsou funkce $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots, u_m(x)$ jsou nezávislé v Ω, jestliže pro všechna $x \in \Omega$ platí, že hodnost matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

je rovna m.

Důkaz. Důkaz pro $m = N$ plyne z předchozí věty, pro $m < N$ je pak nepříliš obtížným důsledkem této věty. Detaily lze nalézt opět v [Ka, str. 310]. □

Příklad 2.1.10. (i) Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2$, $u_1(x_1, x_2) = \sin x_1$, $u_2(x_1, x_2) = \cos x_2$. Podle Věty 2.1.8 nejsou tyto funkce závislé v Ω (jsou tedy nezávislé), protože $J_{\mathbf{u}}(x) = -\cos x_1 \sin x_2$ a tento výraz není identicky nulový na žádné neprázdné otevřené podmnožině $\mathbb{R}^2$. Pokud bychom dokazovali toto tvrzení přímo z definice, zřejmě nemůže existovat žádná funkce F z Definice 2.1.7, neboť zobrazení $(x_1, x_2) \mapsto (\sin x_1, \cos x_2)$ zobrazuje libovolnou otevřenou množinu obsahující $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ na $[-1, 1] \times [-1, 1]$, proto F splňující (I) a (III) z Definice 2.1.7 by musela nutně splňovat $F \equiv 0$.
(ii) Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2$, $u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $u_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Tyto funkce jsou dle Věty 2.1.8 závislé. Příslušná funkce $F(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2$.

Platí

Věta 2.1.11 (O závislosti N řešení)**.** *Nechť pro všechny $\Omega' \subset \Omega$ otevřené je $\sum_{i=1}^N |a_i(x)| > 0$ alespoň pro jedno $x \in \Omega'$. Nechť $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \in C^1(\Omega)$ řeší* (2.1.1)*. Potom jsou $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ závislé v Ω.*

Důkaz. Nechť $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ nejsou závislé v Ω. Potom existuje bod $x_0 \in \Omega$ takový, že

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{\psi}}(x_0) \neq 0.$$

Protože $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ jsou třídy $C^1(\Omega)$, je $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\psi}}(x) \neq 0$ na jistém okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset \Omega$. To implikuje, že systém

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) y_1 & + \dots & + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_N}(x) y_N & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_N}{\partial x_1}(x) y_1 & + \dots & + \frac{\partial \psi_N}{\partial x_N}(x) y_N & = 0 \end{array}$$

má v každém bodě $x \in \mathcal{U}(x_0)$ pouze triviální řešení. To je ale ve sporu s tím, že alespoň v jednom bodě $x_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ je $\sum_{i=1}^N |a_i(x_1)| > 0$. □

Předchozí výsledky ospravedlňují následující definici.

Definice 2.1.12 (Fundamentální systém)**.** Nechť $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ jsou takové funkce, že každá z nich řeší v Ω rovnici (2.1.1). Nechť pro každou podoblast $\Omega' \subset \Omega$ existuje bod $x_0 \in \Omega'$ takový, že hodnost matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{N-1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{N-1}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{N-1}(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

je v tomto bodě rovna $N-1$.

Potom říkáme, že funkce $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ tvoří fundamentální systém rovnice (2.1.1).

Věta 2.1.13 (O maximálním počtu nezávislých řešení)**.** *Nechť pro každou podoblast* $\Omega' \subset \Omega$ *existuje* $x \in \Omega'$ *tak, že* $\sum_{i=1}^N |a_i(x)| > 0$. *Nechť* $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (2.1.1) *v* Ω. *Potom* $\theta \in C^1(\Omega)$ *je řešením* (2.1.1) *v* Ω *právě tehdy, když jsou* $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}, \theta$ *závislé v* Ω.

Důkaz. „$\Rightarrow$" Plyne přímo z Věty o závislosti N řešení (Věta 2.1.11).

„$\Leftarrow$" Nechť $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}, \theta$ jsou závislé v Ω. Tedy $\mathrm{J}_{\vec{\psi},\theta} \equiv 0$ v Ω. Proto soustava

$$y_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \cdots + y_{N-1} \frac{\partial \psi_{N-1}}{\partial x_i} + y_N \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.1.4}$$

má netriviální řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)$ pro každé $x \in \Omega$. Násobme rovnici (2.1.4) funkcí $a_i(x)$. Sečtením těchto rovností dostáváme

$$\sum_{j=1}^{N-1} y_j(x) \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_i} + y_N(x) \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Protože ψ_i, $i = 1, 2, \dots, N-1$ řeší (2.1.1), dostáváme, že

$$y_N(x) \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Nechť θ není řešením (2.1.1). Tedy existuje $x_0 \in \Omega$ takové, že

$$\sum_{i=1}^N a_i(x_0) \frac{\partial \theta(x_0)}{\partial x_i} \neq 0.$$

Díky spojitosti všech funkcí existuje $\mathcal{U}(x_0) \subset \Omega$ takové, že $\sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} \neq 0$ pro všechna $x \in \mathcal{U}(x_0)$. Proto $y_N \equiv 0$ na $\mathcal{U}(x_0)$, tedy rovnost (2.1.4) má na $\mathcal{U}(x_0)$ tvar

$$y_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + y_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \cdots + y_{N-1} \frac{\partial \psi_{N-1}}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Protože $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ tvoří fundamentální systém (2.1.1) na Ω, existuje bod $x_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ takový, že tato soustava má v tomto bodě pouze triviální řešení. Tedy také (2.1.4) má v tomto bodě pouze triviální řešení, tedy

$$\mathrm{J}_{\vec{\psi},\theta}(x_1) \neq 0.$$

To je ale ve sporu s předpokladem na závislost funkcí $\psi_1, \dots, \psi_{N-1}, \theta$ v Ω. □

Následující věta nám v kombinaci s Větou o ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu (Věta 2.1.3) dává návod, jak rovnici (2.1.1) řešit. Pomocí Věty o ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu nalezneme jedno řešení této rovnice, pomocí Věty o redukci (Věta 2.1.14) pak redukujeme počet proměnných a znovu se vrátíme k Větě o ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu. Po konečném počtu kroků pak nalezneme řešení původní rovnice. Je ale třeba říci, že i když obecně tento postup vede k cíli vždy, již pro $N = 3$ je celý postup velmi pracný a pro $N > 3$ je realizovatelný jen ve velmi speciálních případech.

Zavedeme ještě následující značení. Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)}{D(x_1, x_2, \dots, x_k)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Věta 2.1.14 (O redukci). *Nechť $m < N - 1$, $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$ a jsou řešením* (2.1.1) *v Ω takové, že pro všechna $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_N) \in \Omega$ je*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0. \tag{2.1.5}$$

Definujme zobrazení $\widetilde{x}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ jako

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_i &= \psi_i(x), & i &= 1, 2, \dots, m \\ \widetilde{x}_i &= x_i, & i &= m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Nechť je toto zobrazení prosté na Ω a označme

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} &= \widetilde{x}(\Omega) \\ \widetilde{a}_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_N) &= a_i(x_1(\widetilde{x}), x_2(\widetilde{x}), \dots, x_N(\widetilde{x})), \qquad i = m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned}$$

Nechť $\widetilde{\psi}_{m+1}, \widetilde{\psi}_{m+2}, \dots, \widetilde{\psi}_{N-1}$ jsou řešením rovnice

$$\sum_{i=m+1}^{N} \widetilde{a}_i(\widetilde{x}) \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \widetilde{x}_i} = 0 \tag{2.1.7}$$

v Ω (nezávislé proměnné jsou $\widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots, \widetilde{x}_N$; $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_m$ jsou parametry) a nechť platí

$$\frac{D(\widetilde{\psi}_{m+1}, \widetilde{\psi}_{m+2}, \dots, \widetilde{\psi}_{N-1})}{D(\widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots, \widetilde{x}_{N-1})} \neq 0$$

pro všechna $\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$. Potom funkce

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \dots, \psi_{N-1}(x),$$

kde

$$\psi_k(x) = \widetilde{\psi}_k(\widetilde{x}(x)) \qquad v\ \Omega, \quad k = m+1, m+2, \dots, N-1$$

tvoří fundamentální systém rovnice (2.1.1) *v Ω.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že funkce $\psi_k(x)$, $k = m+1, m+2, \dots, N-1$ řeší rovnici (2.1.1) v Ω. Fixujme tedy $k \in \mathbb{N}$, $m+1 \le k \le N-1$. Potom

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{\psi}_k}{\partial \widetilde{x}_j} \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i} + \sum_{j=m+1}^{N} \frac{\partial \widetilde{\psi}_k}{\partial \widetilde{x}_j} \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Vynásobme tuto rovnost $a_i(x)$ a sečtěme přes $i = 1, 2, \dots N$. Použitím vztahů $\frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$ pro $j = 1, 2, \dots m$ a $\frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ pro $j = m+1, m+2, \dots, N$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{\psi}_k(\tilde{x}(x))}{\partial \widetilde{x}_j} \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_i} a_i(x) \Big) + \sum_{j=m+1}^{N} \frac{\partial \widetilde{\psi}_k(\tilde{x}(x))}{\partial \widetilde{x}_j} \widetilde{a}_j(\widetilde{x}(x)).$$

Protože ψ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ řeší (2.1.1) v Ω a $\widetilde{\psi}_k$, $k = m+1, m+2, \dots, N-1$ řeší (2.1.7), řeší ψ_k, $k = m+1, m+2, \dots, N-1$ rovnici (2.1.1) v Ω.

Zbývá dokázat, že $\{\psi_j\}_{j=1}^{N-1}$ je fundamentální systém rovnice (2.1.1) v Ω. Můžeme psát

$$\psi_j(x) = \theta_j(\widetilde{x}(x)), \qquad j = 1, 2, \dots, N-1, \tag{2.1.8}$$

kde $\widetilde{x}\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$ je definováno vztahem (2.1.6) ze znění věty a $\vec{\theta}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^{N-1}$ je definováno

$$\begin{aligned} &\theta_i(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_i, && i = 1, 2, \dots, m \\ &\theta_i(\widetilde{x}) = \widetilde{\psi}_j(\widetilde{x}), && i = m+1, m+2, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Proto díky (2.1.8), (2.1.9), (2.1.6) a (2.1.5) máme

$$\begin{aligned} \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})}(x) &= \frac{D(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}{D(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_{N-1})}(\widetilde{x}(x)) \frac{D(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_{N-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})}(x) \\ &= \frac{D(\widetilde{\psi}_{m+1}, \widetilde{\psi}_{m+2}, \dots, \widetilde{\psi}_{N-1})}{D(\widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots, \widetilde{x}_{N-1})}(\widetilde{x}(x)) \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}(x) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Proto funkce $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ tvoří fundamentální systém rovnice (2.1.1) v Ω. □

Poznámka 2.1.15. (i) Všimněme si, že $\psi \equiv 0$ je vždy řešení rovnice (2.1.1).
(ii) Jsou-li $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ řešení rovnice (2.1.1), F je třídy C^1 na $\mathbb{R}^m$, pak

$$\theta(x) := F(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x))$$

opět řeší (2.1.1).
(iii) Otázka, jak nalézt řešení rovnice (2.0.1), tedy nehomogenní verze rovnice (2.1.1), bude zodpovězena v příští podsekci. Budeme se na ni dívat jako na speciální případ kvazilineární rovnice.

Příklad 2.1.16. Nalezněme fundamentální systém rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} - xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Jedno řešení nalezneme použitím Věty o ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu (Věta 2.1.3). Charakteristická rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xz, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -xy.$$

Odsud plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t} = 2xyz - 2xyz = 0,$$

tedy

$$\psi_1 = y^2 + z^2$$

je jedním řešením dané rovnice. Hledejme druhé nezávislé řešení. K tomu použijeme Větu o redukci (Věta 2.1.14). Zavedeme záměnu proměnných

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x \\ \widetilde{y} &= y^2 + z^2 \\ \widetilde{z} &= z \end{aligned}$$

(což odpovídá $\widetilde{x}_1 = \widetilde{y}$, $\widetilde{x}_2 = \widetilde{x}$ a $\widetilde{x}_3 = \widetilde{z}$ ze znění dané věty). Toto zobrazení je prosté na množině $\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$, na které budeme nadále pracovat. Na této množině hledáme řešení rovnice

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x}} - \widetilde{x}\sqrt{\widetilde{y} - \widetilde{z}^2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}} = 0.$$

Charakteristickou rovnicí je

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}t} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{z}}{\mathrm{d}t} = -\widetilde{x}\sqrt{\widetilde{y} - \widetilde{z}^2},$$

přičemž $\widetilde{y}$ je parametr a uvažujeme množinu $\{(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \in \mathbb{R}^2 : \widetilde{z}^2 < \widetilde{y}\}$. Odsud máme

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}}{\mathrm{d}\widetilde{x}} = -\widetilde{x}\sqrt{\widetilde{y} - \widetilde{z}^2}.$$

Tuto rovnici můžeme řešit metodou pro řešení rovnice se separovanými proměnnými a dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{\widetilde{y}}}\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{z}^2}{\widetilde{y}}}} = -\widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{x},$$

což vede na

$$\arcsin\left(\frac{\widetilde{z}}{\sqrt{\widetilde{y}}}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{x}^2 = C.$$

Aplikací funkce sin na obě strany rovnosti a použitím součtového vztahu na levé straně rovnosti máme (zde jsme se zúžili na množinu, kde $\tilde{z} > 0$)

$$\frac{\widetilde{z}}{\sqrt{\widetilde{y}}}\cos\left(\frac{\widetilde{x}^2}{2}\right) + \sqrt{1-\frac{\widetilde{z}^2}{\widetilde{y}}}\sin\left(\frac{\widetilde{x}^2}{2}\right) = C,$$

tedy přechodem do původních proměnných máme

$$\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = C.$$

Proto máme

$$u(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Použitím bodu (ii) Poznámky 2.1.15 a tvaru funkce ψ_1 je ale také

$$\psi_2(x,y,z) = z\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + y\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

řešením dané rovnice. Není těžké ukázat přímým dosazením, že ψ_2 řeší naši rovnici na $\mathbb{R}^3$ a (ψ_1, ψ_2) tvoří na $\mathbb{R}^3$ fundamentální systém naší rovnice.

Příklad 2.1.17. Hledejme řešení rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Příslušný charakteristický systém má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x^2+y^2.$$

Zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,$$

odkud

$$\psi_1 = x^2 + y^2 - 2z.$$

Jinou možností je také
$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xy - xy = 0,$$
tedy
$$x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$
Na množině, kde $x > 0$ nebo $x < 0$, tedy máme
$$\psi_2 = \frac{y}{x}.$$
Opět není těžké vidět, že na těchto dvou množinách jsme získali fundamentální systém naší rovnice.

2.2 Kvazilineární rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicí ($(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$)
$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x_1, x_2, \dots, x_N, z)\frac{\partial z(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} = g(x_1, x_2, \dots, x_N, z). \tag{2.2.1}$$
Pokud je $\sum_{i=1}^{N} |a_i(x_1, x_2, \dots, x_N, z| > 0$ ve všech bodech $\Omega\times\mathbb{R}$, rovnici (2.2.1) nazýváme kvazilineární rovnicí 1. řádu.

Poznamenejme ještě, že nehomogenní lineární rovnice 1. řádu, tedy rovnice (2.0.1), je speciálním případem rovnice kvazilineární.

Definice 2.2.1 (Charakteristický systém, charakteristika)**.** Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu
$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x, z), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g(x, z) \tag{2.2.2}$$
nazýváme charakteristickým systémem rovnice (2.2.1). Libovolné řešení soustavy (2.2.2) s definičním oborem (t_1, t_2) s funkcemi $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$, $z(t)$ patřícími do prostoru $C^1((t_1, t_2))$ nazýváme charakteristikou rovnice (2.2.1).

Poznámka 2.2.2. Rovnice (2.1.1) je speciálním případem rovnice (2.2.1). Dle Definice 2.2.1 je libovolné řešení soustavy
$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$
charakteristikou rovnice (2.1.1). Potom můžeme Větu o ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu (Věta 2.1.3) přeformulovat následovně. Nechť $\psi \in C^1(\Omega)$. Potom je ψ řešením rovnice (2.1.1) právě tehdy, když každým bodem grafu
$$G = \{(x, z) : x \in \Omega, z = \psi(x)\}$$
prochází alespoň jedna charakteristika ve smyslu Definice 2.2.1, tedy
$$\{(x_1, x_2, \dots, x_N, z) : x_i = x_i(t), i = 1, 2, \dots, N, z = z(t), t \in (t_1, t_2)\} \subset G.$$

Analogická věta platí i pro náš kvazilineární případ.

Věta 2.2.3 (O charakterizaci řešení kvazilineární rovnice)**.** *Nechť* $\eta \in C^1(\Omega)$. *Potom je* η *řešením rovnice* (2.2.1) *v* Ω *právě tehdy, když každým bodem grafu*

$$G = \{(x, z) : x \in \Omega, z = \eta(x)\}$$

prochází alespoň jedna charakteristika, ležící celá v G.

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Nechť $(\xi, \mu) \in G$. Podle předpokladu existuje charakteristika

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), z(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$$

taková, že existuje $\tau \in (t_1, t_2)$, $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $z(\tau) = \mu$ a pro všechna $t \in (t_1, t_2)$ je $\eta(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) - z(t) = 0$. Proto na (t_1, t_2)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\eta(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) - z(t)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) a_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), z(t)) \\ &\qquad - g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), z(t)). \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“ Nechť $\eta \in C^1(\Omega)$ je řešení rovnice (2.2.1), (ξ, μ) je libovolný bod množiny G. Soustava

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_N, \eta(x_1, x_2, \dots, x_N)), \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

má spojité pravé strany v množině Ω. Proto podle Peanovy existenční věty pro systémy ODR 1. řádu existuje alespoň jedno řešení $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ s definičním oborem (t_1, t_2) procházející bodem ξ takové, že $x_i \in C^1((t_1, t_2))$, $i = 1, 2, \dots, N$. Nechť pro $\tau \in (t_1, t_2)$ je $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Pokud položíme

$$z(t) = \eta(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)), \qquad t \in (t_1, t_2),$$

pak $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), z(t)$ je charakteristika rovnice (2.2.1) procházející bodem (ξ, μ), která leží v G. □

Poznámka 2.2.4. (i) Pokud tedy uvažujeme nehomogenní lineární rovnici

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} = f(x), \tag{2.2.3}$$

můžeme použít postup z předchozí věty. Charakteristickou rovnicí je

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = a_i(x(t)), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \quad \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t))$$

a pak postupujeme dle předchozí věty. Všimněme si, že prvních N rovnic lze vyřešit zvlášť a poté toto řešení lze dosadit do poslední rovnice.

(ii) Ve smyslu Definice 2.1.2 je soustava (2.2.2) charakteristickou rovnicí pro homogenní rovnici

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i} a_i(x,z) + \frac{\partial w}{\partial z} g(x,z) = 0. \tag{2.2.4}$$

Je tedy otázkou, jestli je mezi řešením (2.2.4) a (2.2.1) nějaký vztah.

Věta 2.2.5 (Postačující podmínka pro řešení kvazilineární rovnice)**.** *Nechť funkce* $a_i(x,z) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$*,* $i = 1, 2, \dots, N$*,* $g(x,z) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$*. Nechť* $\psi(x,z)$ *řeší rovnici* (2.2.4) *a nechť* $\eta \in C^1(\Omega)$ *splňuje:*
(i) *v každé podoblasti* $\Omega' \subset \Omega$ *existuje bod* ξ *takový*

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(\xi, \eta(\xi)) \neq 0$$

(ii) $\psi(x, \eta(x))$ *je konstantní v* Ω*.*
Potom funkce η *řeší rovnici* (2.2.1) *v* Ω*.*

Důkaz. Z podmínky (ii) a z hladkosti funkce η plyne, že

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,\eta(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,\eta(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Násobme rovnost funkcí $a_i(x, \eta(x))$ a sečtěme přes i. Dostáváme

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x,\eta(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,\eta(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,\eta(x)) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_i} a_i(x,\eta(x)) = 0.$$

Protože ψ řeší (2.2.4) na $\Omega \times \mathbb{R}$, máme

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x,\eta(x)) \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_i} a_i(x,\eta(x)) - g(x,\eta(x)) \Big) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Nechť η není řešením rovnice (2.2.1) v Ω. Existuje tedy $x_0 \in \Omega$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta(x_0)}{\partial x_i} a_i(x_0, \eta(x_0)) - g(x_0, \eta(x_0)) \neq 0,$$

pak ale ze spojitosti všech funkcí musí totéž platit i na jistém okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset \Omega$. Pak ale nutně na tomto okolí platí $\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, \eta(x)) = 0$, což je spor s předpokladem (i). □

Otázkou je, zda lze takto získat všechna řešení rovnice (2.2.1).

Věta 2.2.6 (O nalezení všech řešení kvazilineární rovnice)**.** *Nechť* $a_i(x,z)$*,* $i = 1, 2, \dots, N$ *a* $g(x,z)$ *jsou spojité funkce na* $\Omega \times \mathbb{R}$ *a nechť*

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i(x,z)| > 0 \qquad \forall (x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Nechť existuje fundamentální systém rovnice (2.2.4) *v* $\Omega\times\mathbb{R}$. *Je-li* η *řešení rovnice* (2.2.1) *v* Ω *a* $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$, *pak existuje* $\psi_{\Omega'}$ *řešení rovnice* (2.2.4) *v* $\Omega' \times \mathbb{R}$, *které není identicky nulové v žádné podoblasti* $\Omega \times \mathbb{R}$ *a pro které platí*

$$\psi_{\Omega'}(x_1, x_2, \dots, x_N, \eta(x_1, x_2, \dots, x_N)) \equiv 0 \qquad v\ \Omega'.$$

Důkaz. Nechť $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ je fundamentální systém rovnice (2.2.4) a položme

$$\Psi_j(x) := \psi_j(x, \eta(x)), \qquad j = 1, 2, \dots, N.$$

Potom máme

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}(x) a_i(x, \eta(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x, \eta(x)) a_i(x, \eta(x)) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(x, \eta(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) a_i(x, \eta(x)),$$

$j = 1, 2, \dots, N$. Protože

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x, \eta(x)) a_i(x, \eta(x)) = -\frac{\partial \psi_j}{\partial z}(x, \eta(x)) g(x, \eta(x))$$

a

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(x, \eta(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) a_i(x, \eta(x)) = \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(x, \eta(x)) g(x, \eta(x)),$$

máme

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}(x) a_i(x, \eta(x)) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, N.$$

Podle Věty o závislosti N řešení (Věta 2.1.11) jsou tyto funkce závislé v Ω, neboť je jich N. Pro libovolné $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ tedy dle Definice 2.1.7 existuje funkce $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že
(i) $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$
(ii) F není identicky nulová v žádné podoblasti $O \subset \mathbb{R}^N$
(iii) $F(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) = 0$ v $\overline{\Omega'}$.
Tedy $\psi_{\Omega'}(x, \eta) := F(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ je hledané řešení rovnice (2.2.4) v $\Omega' \times \mathbb{R}$. □

Příklad 2.2.7. Nalezněme řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial t} + b\frac{\partial z}{\partial x} = z^2$$

splňující podmínku

$$z(t_0, x) = u_0(x).$$

Uvažujme homogenní rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b\frac{\partial w}{\partial x} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.2.5}$$

a příslušný charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1 \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = b \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = z^2.$$

Odsud zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x - bt) = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{z} + t\right) = 0.$$

Proto máme

$$\psi_1(t, x, z) = x - bt \qquad \text{a} \qquad \psi_2(t, x, z) = \frac{1}{z} + t.$$

Nyní využijeme Větu o postačující podmínce pro řešení kvazilineární rovnice (Větu 2.2.5) v kombinaci se zadanou podmínkou. Obecné řešení naší homogenní rovnice (2.2.5) lze psát jako

$$\psi(t, x, z) = F(\psi_1(t, x, z), \psi_2(t, x, z)),$$

přičemž požadujeme, aby

$$\psi(t_0, x, u_0(x)) = 0.$$

Tedy hledáme $F(u, v)$, aby $F(x - bt_0, \frac{1}{u_0(x)} + t_0) = 0$. Odsud plyne, že

$$F(u, v) = \frac{1}{u_0(u + bt_0)} - v + t_0.$$

Proto dostáváme řešení naší úlohy v implicitním tvaru

$$\frac{1}{u_0(x - b(t - t_0))} - \frac{1}{z(t, x)} - (t - t_0) = 0.$$

Jednoduchým výpočtem odsud plyne

$$z(t, x) = \frac{u_0(x - b(t - t_0))}{1 - (t - t_0)u_0(x - b(t - t_0))}.$$

Odsud vidíme, že řešení existuje pro $t > t_0$ (tedy podmínku v bodě t_0 chápeme jako počáteční podmínku) globálně v čase pouze pokud je $u_0 \leq 0$ na $\mathbb{R}$. V opačném případě existuje řešení pouze na intervalu $(t_0, T_{\max})$, kde $T_{\max} = t_0 + \frac{1}{\sup_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)}$.

Příklad 2.2.8. Nalezněme řešení rovnice

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2 + z^2$$

splňující podmínku

$$z(1, y) = y^2.$$

Uvažujme místo rovnice výše homogenní lineární rovnici

$$xz\frac{\partial w}{\partial x} + yz\frac{\partial w}{\partial y} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.2.6}$$

Napišme si příslušný charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xz \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = yz \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zřejmě máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Odsud je

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x} \qquad \text{na } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}.$$

Abychom nalezli druhé lineárně nezávislé řešení, všimněme si, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z^2}{x^2}\right) = \frac{2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}x^2 - 2z^2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^4} = \frac{2z(x^2 + y^2 + z^2) - 2z^3}{x^2} = \frac{2z(x^2 + y^2)}{x^2}.$$

První člen napravo získáme jednoduše; platí totiž

$$\frac{\mathrm{d}(\log x)}{\mathrm{d}t} = z.$$

Získat druhý člen je náročnější, je třeba si všimnout, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y^2 \log x}{x^2}\right) = \frac{2y^2 z \log x}{x^2} - \frac{2y^2 xz \log x}{x^3} + \frac{y^2}{x^2}\frac{xz}{x} = \frac{y^2 z}{x^2}.$$

Proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z^2 - 2(x^2 + y^2)\log x}{x^2}\right) = 0.$$

Druhé řešení je tedy (tentokrát na množině $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$)

$$\psi_2 = \frac{z^2 - 2(x^2 + y^2)\log x}{x^2}.$$

Není těžké zkontrolovat, že tato dvě řešení jsou na výše uvedené množině nezávislá. Nalezněme nyní takové řešení (2.2.6), které splňuje podmínku $\psi(1, y, y^2) = 0$. Pokud zapíšeme toto řešení pomocí fundamentálního systému, máme

$$F(\psi_1(1, y, y^2), \psi_2(1, y, y^2)) = F(y, y^4) = 0.$$

Tomu zjevně vyhovuje $F(u, v) = u^4 - v$, tedy

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x, y, z)^4 - \psi_2(x, y, z) = \frac{y^4}{x^4} - \frac{z^2 - 2(x^2 + y^2)\log x}{x^2} = 0.$$

Odsud dopočteme, že

$$z(x, y) = \frac{1}{x}\sqrt{y^4 + 2x^2(x^2 + y^2)\log x}$$

řeší naši úlohu na množině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

2.3 Transportní rovnice. Burgersova rovnice

V této části se podíváme na dva speciální typy rovnic, jednu lineární a jednu kvazilineární. Nejprve se věnujme transportní rovnici, což je speciální typ rovnice lineární. Má ale poměrně velký význam ve fyzice, ukažme si nejprve, co vlastně popisuje.

Uvažujme $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,x)\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^N$ dané vektorové pole, $[0,T]$ je časový interval a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ oblast v $\mathbb{R}^N$, na které je toto vektorové pole definováno. Budeme se na toto pole dívat jako na rychlostní pole. Mějme nějakou částici (například barvivo), které se v čase $t = 0$ nachází v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in \Omega$, která je unášena daným rychlostním polem $\mathbf{v}$. Pohybuje se tedy po trajektorii $\boldsymbol{\chi}(\cdot, x^0)\colon [0,T] \to \Omega$ tak, že časovému okamžiku t přiřadí bod $x \in \Omega$ takový, že

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \mathbf{v}, \qquad \text{neboli } \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(t,x^0)}{\partial t} = \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\chi}(t,x^0)). \tag{2.3.1}$$

Označme bod v prostoru $x := \boldsymbol{\chi}(t,x^0)$. Naše částice může transportovat nějakou fyzikální veličinu (například hustotu, elektrický náboj). Označme ji u. Pokud lze zanedbat ostatní fyzikální mechanismy (například zdroje veličiny u, difúzi), pak se hodnota u podél trajektorie nemění, tedy (fixujeme bod x^0, tedy u závisí pouze na čase t)

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t, \boldsymbol{\chi}(t,x^0)).$$

Aplikací řetízkového pravidla dostáváme

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \boldsymbol{\chi}(t,x^0)) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, \boldsymbol{\chi}(t,x^0)) \frac{\partial \chi_k}{\partial t}(t,x^0).$$

Proto

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (\mathbf{v}\cdot\nabla u)(t,x) = 0. \tag{2.3.2}$$

Operátor $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$ se nazývá transportní operátor.

Trajektorie částice v daném vektorovém poli je popsána systémem obyčejných diferenciálních rovnic (2.3.1), zatímco časový a prostorový vývoj veličiny u, která se po dané trajektorii pohybuje, řeší parciální diferenciální rovnici 1. řádu (2.3.2). Pokud zadáme počáteční podmínku pro rozložení pole u v počátečním čase, získáme Cauchyovu úlohu pro parciální diferenciální rovnici 1. řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0 && \text{na } \Omega. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Pokud navíc uvažujeme zdrojové členy, pak dostáváme nehomogenní verzi pro úlohu (2.3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u &= f && \text{na } (0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0 && \text{na } \Omega. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Na tyto úlohy teď můžeme použít existenční teorii, kterou jsme si odvodili výše.

Nejprve se podívejme na transportní rovnici (2.3.3) pro případ $N = 1$, tedy na

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.3.5}$$

splňující počáteční podmínku

$$u(0, x) = u_0(x)$$

na celém $\mathbb{R}$. Budeme uvažovat pouze situaci, kdy b je konstanta. Předpokládejme, že $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Podle výše uvedeného hledáme řešení charakteristického systému

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 1 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b. \end{aligned}$$

Řešením je $t = s + t_0$ a $x = bs + x_0$. Tedy $x - bt = konst.$ podél řešení tohoto systému a obecné řešení rovnice (2.3.5) je $u(t, x) = \omega(x - bt)$. Pokud přidáme počáteční podmínku, dostáváme řešení ve tvaru

$$u(t, x) = u_0(x - bt),$$

$x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Protože u_0 je třídy $C^1(\mathbb{R})$, je také $u \in C^1([0, \infty)\times\mathbb{R})$. Toto řešení nazýváme putující vlna (anglicky „travelling wave“).

Uvažujme nyní vícedimenzionální analog této rovnice, tedy ($\mathbf{b}$ je opět konstatní)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla u &= 0 \qquad && \text{na } (0, T)\times\mathbb{R}^N \\ u(0, x) &= u_0 && \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Odpovídající charakteristický systém je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 1 \\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} &= b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Dostáváme N nezávislých řešení $x_i - b_i t$, $i = 1, 2, \dots, N$ (počet proměnných je $N + 1$). Řešením je tedy N funkcí

$$\psi_i = \psi_i(x_i - b_i t),$$

$i = 1, 2, \dots, N$. To můžeme zapsat jako

$$u(t, x) = \psi(x_1 - b_1 t, x_2 - b_2 t, \dots, x_N - b_N t) = \psi(x - \mathbf{b}t).$$

Vzhledem k počáteční podmínce potom máme

$$u(t, x) = u_0(x - \mathbf{b}t), \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Nyní hledejme řešení úlohy s pravou stranou, tedy řešení úlohy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla u &= f && \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N.
\end{aligned} \tag{2.3.7}
$$

Protože řešení splňující homogenní rovnici a počáteční podmínku umíme nalézt, hledáme partikulární řešení splňující nulovou počáteční podmínku pro $t = 0$. Není těžké ověřit, že tímto řešením je

$$\eta(t,x) = \int_0^t f(s, x - \mathbf{b}(t-s))\, \mathrm{d}s.$$

Pokud totiž uvažujeme rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla w + f \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.3.8}$$

a k ní příslušný charakteristický systém

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} &= 1 \\
\frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s} &= b_i, \qquad i = 1,2,\dots,N \\
\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} &= f(t(s), x(s)),
\end{aligned}
$$

dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x_i - b_i t) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,N$$

a současně

$$
\begin{aligned}
t &= s + C^0, \qquad C^0 \in \mathbb{R} \\
x_i &= b_i s + C_i^1, \qquad i = 1,2,\dots,N, \qquad C_i \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Proto

$$z(s) = \int_{z_0}^s f(\tau + C_0, \mathbf{b}\tau + \mathbf{C^1})\, \mathrm{d}\tau.$$

Proto lze psát obecné řešení rovnice (2.3.8) ve tvaru

$$\psi(t,x,z) = F\Big(x - \mathbf{b}t, z - \int_{z_0}^s f(\tau + C_0, \mathbf{b}\tau + \mathbf{C^1})\, \mathrm{d}\tau\Big).$$

Volbou $s = t$ máme $C_0 = 0$, $\mathbf{C^1} = \mathbf{b} - xt$, tedy

$$\psi(t,x,z) = F\Big(x - \mathbf{b}t, z - \int_{z_0}^t f(\tau, x - \mathbf{b}(t-\tau))\, \mathrm{d}\tau\Big).$$

Protože požadujeme splnění nulové počáteční podmínky pro $t = 0$, máme $0 = \psi(0,x,0)$, tedy

$$F\Big(x, -\int_{z_0}^0 f(\tau, x - \mathbf{b}(t-\tau))\, \mathrm{d}\tau\Big) = 0.$$

Odsud plyne, že $z_0 = 0$ a $F_1(x, z) = z$, tedy

$$u(t, x) = \int_0^t f(\tau, x - \mathbf{b}(t - \tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Proto řešení úlohy (2.3.7) lze psát ve tvaru

$$u(t, x) = u_0(x - \mathbf{b}t) + \int_0^t f(s, x - \mathbf{b}(t - s))\,\mathrm{d}s.$$

Není také těžké ukázat, že toto řešení je jediné na třídě $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$.

Cvičení 2.3.1. Ukažte výše zmíněnou jednoznačnost, tj. dokažte, že jediným klasickým řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla u &= 0 && \text{na } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

je $u \equiv 0$.

Na závěr se podíváme na Cauchyovu úlohu pro speciální případ kvazilineární (tedy nelineární) parciální diferenciální rovnice prvního řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 && \text{na } (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Tato rovnice se nazývá Burgersova. Všimněme si, že rovnici lze psát také ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial x} = 0.$$

Pokud předpokládáme, že naše řešení splňuje $\lim_{x\to\pm\infty} u(t, x) = 0$, pak máme po zintegrování tvaru výše od $-R$ do R a provedení limity $R \to \infty$ (za předpokladu, že $|\int_{\mathbb{R}} u_0\,\mathrm{d}x| < \infty$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot)\,\mathrm{d}x = 0,$$

tedy

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_0\,\mathrm{d}x.$$

Budeme-li navíc předpokládat, že $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, pak přenásobením funkcí u a následnou integrací

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} u^2(t, \cdot)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proto

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(t, \cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_0^2\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky, pro libovolné $p > 1$ (násobíme funkcí $|u|^{p-2}u$)

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^p(t,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^p\,\mathrm{d}x.$$

Provedením $\lim_{p\to\infty}$ proto také máme

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Nyní se podíváme na existenci řešení. Pokud použijeme Větu o charakterizaci řešení kvazilineární rovnice (Věta 2.2.3), pak dostáváme, že $u(t,x)$ je řešením Burgersovy rovnice právě tehdy, když splňuje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(t(s), x(s)) = 0,$$

kde $t(s)$ a $x(s)$ řeší charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 1, & t(0) &= t_0 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= u(t(s), x(s)) & x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Všimněme si, že charakteristický systém v tomto případě závisí na řešení. Na druhou stranu, protože $t = t_0 + s$, je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s + t_0, x(s)) = 0,$$

tedy $u(s + t_0, x(s)) = konst$. Odsud plyne následující.

Věta 2.3.2 (O řešení Burgersovy rovnice)**.** *Nechť $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Potom řešení úlohy* (2.3.9) *splňuje*

$$u(t, x + tu_0(x)) = u_0(x).$$

Důkaz. Všimněme si, že řešení (2.3.10) splňující, že $u(t(s), x(s))$ je konstantní, splňuje

$$\begin{aligned} t(s) &= s + t_0 \\ x(s) &= Cs + x_0, \end{aligned}$$

kde $C = u(t(s), x(s)) = konst$. Navíc

$$C = u(t(s), x(s))|_{s=-t_0} = u(0, x_0 - Ct_0) = u_0(x_0 - Ct_0).$$

Záměnou proměnných $y_0 = x_0 - Ct_0$ máme

$$u(t(s), x(s))|_{s=0} = u(t_0, x_0) = u(t_0, y_0 + Ct_0) = C = u_0(y_0),$$

tedy přeznačením $t := t_0$, $x := y_0$ a připomenutím $C = u_0(y_0) = u_0(x)$ dostáváme dokazovaný tvar řešení. □

Poznámka 2.3.3. Pro $u(t, x+tu_0(x)) = u_0(x)$ a u_0 neklesající na $\mathbb{R}$ nedochází k tomu, že by se protínaly charakteristiky, tedy řešení (2.3.10). Je-li totiž $x_1 < x_2$, pak je $u_0(x_1) \leq u_0(x_2)$, a proto se polopřímky $x(s) = su_0(x_i)+x_i$, $s \geq 0$ nikde neprotnou. Naopak, je-li pro nějaké $x_1 < x_2$ splněné $u_0(x_1) > u_0(x_2)$, pak se tyto polopřímky pro jistou hodnotu $t_{\text{crit}} = s_{\text{crit}}$ protnou. Proto v čase $t = t_{\text{crit}}$ přestává existovat klasické řešení.

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, může se stát, že úloha (2.3.9) nemusí mít klasické řešení, tedy řešení takové, že $u \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Zavedeme si proto pojem tzv. slabého řešení, což je pojem slabší než řešení klasické, ale silnější než řešení distributivní (nebo-li řešení ve smyslu distribucí, kde nepožadujeme, aby řešením byla funkce, ale může to být i komplikovanější objekt, tedy distribuce).

Nechť tedy $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ (tedy spojitě diferencovatelná funkce s kompaktním nosičem) je libovolná. Násobme $(2.3.9)_1$ funkcí φ, integrujme přes $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ a proveďme příslušné integrace per partes. Pokud předpokládáme, že u je spojitá v čase 0, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + u\frac{\partial u}{\partial x}\varphi \Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial x}\varphi \Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} u(0,x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

To nás přivádí k následující definici

Definice 2.3.4 (Slabé řešení Burgersovy rovnice)**.** Nechť $u \in L^2_{\text{loc}}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ je taková, že zobrazení $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(t,\cdot)\varphi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x$ je spojitá funkce v čase $t = 0$ pro všechna $\varphi \in C_0^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Potom u nazýváme *slabým řešením Burgersovy rovnice*, jestliže

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x$$

pro libovolné $\varphi \in C_0^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

Všimněme si, že ve slabé formulaci není třeba vědět nic o derivacích funkce u, stačí nám lokální integrovatelnost u^2 a jistá forma spojitosti v čase $t = 0$. Všechny diferenciální operátory jsou (podobně jako u distributivní derivace) aplikovány na funkci φ, která se nazývá testovací funkce. Ale na rozdíl od chápání rovnice ve smyslu distribucí pracujeme s funkcemi, nikoliv s distribucemi. Platí následující tvrzení, které nám říká, že slabé řešení je vhodné zobecnění klasického řešení.

Věta 2.3.5 (O kompatibilitě slabého a klasického řešení Burgersovy rovnice)**.** (i) *Pokud je u klasickým řešením úlohy* (2.3.9)*, pak je též slabým řešením dle Definice 2.3.4.*
(ii) *Pokud je u slabým řešením dle Definice 2.3.4 a $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$, pak je u též klasickým řešením úlohy* (2.3.9).

Důkaz. (i) Tato část plyne z odvození nad definicí slabého řešení, jen si stačí uvědomit, že všechny integrály ve slabé formulaci jsou konečné.

(ii) Protože u je hladké dle předpokladů věty, lze integrovat „zpět per partes“. Dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t} u + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0,x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + u \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} (u(0,x) - u_0(x)) \varphi(0,x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Odsud dostáváme (s daným výsledkem jste se setkali na přednášce z teorie míry, říká, že pokud lokálně integrovatelná funkce splňuje, že $\int_O f \varphi \,\mathrm{d}x = 0$ pro každou hladkou funkci s kompaktním nosičem v O, pak je tato funkce nulová s.v.), že platí s.v. na $(0,T) \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Protože je funkce u spojitě diferencovatelná, rovnost platí na $(0,T) \times \mathbb{R}$. Pokud se vrátíme k rovnosti (2.3.11), máme

$$\int_{\mathbb{R}} (u(0,x) - u_0(x)) \varphi(0,x) \,\mathrm{d}x = 0$$

pro libovolné $\varphi \in C_0^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Proto použitím stejného argumentu jako výše je $u(0,x) = u_0(x)$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. □

Slabé řešení je vhodným pojmem v situacích, kdy nemáme k dispozici klasické řešení, což budeme demonstrovat v následujícím příkladě.

Příklad 2.3.6. Uvažujme tzv. Riemannův problém pro Burgersovu rovnici, tedy úlohu

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{na } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ &\text{a) } u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{b) } u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Řešení je konstantní na charakteristikách. Počáteční hodnota je buď 0 nebo 1. Proto v případě, že počáteční hodnota je nulová, má charakteristika tvar

$$x = x_0, \qquad t = s,$$

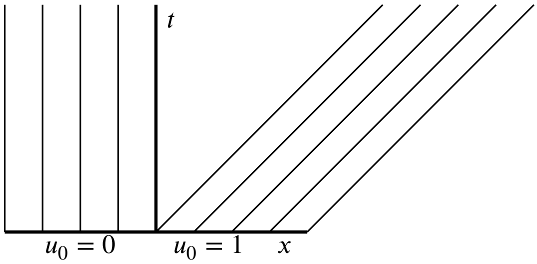
pokud je počáteční hodnota 1, pak má charakteristika tvar

$$x = s + x_0, \qquad t = s.$$

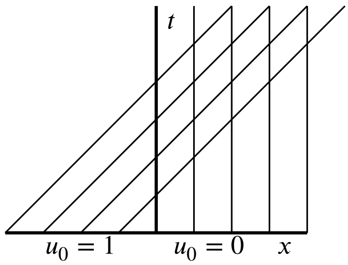
To vede k následujícímu problému. V případě úlohu a) není řešení definované na množině

$$S = \{(t,x) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \,:\, t \geq x\}.$$

V případě úlohy b) množinou S procházejí dvě charakteristiky, není tedy jasné, jak řešení na této množině definovat, situace je znázorněna na Obrázcích 2.1 a 2.2.



Obrázek 2.1: Tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě a).



Obrázek 2.2: Tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě b).

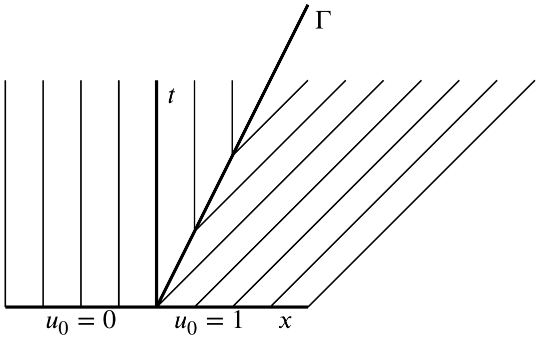
Zřejmě někde na této množině vzniká rázová vlna, tedy řešení bude nespojité. Proto budeme muset pracovat se slabým řešením. Pokusme se postupovat následovně. Pro jisté $\alpha > 0$, které nalezneme níže, definujme množinu

$$\Gamma := \{(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \,:\, t = \alpha x\}$$

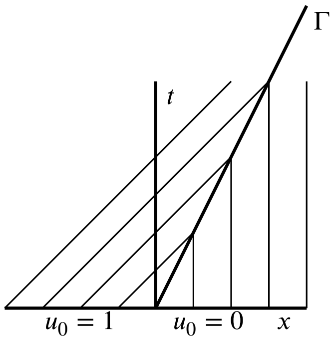
a uvažujme charakteristiky jako na Obrázcích 2.3 a 2.4 níže.

Tedy řešení je po částech konstantní, v případě úlohy a) je řešení nulové na množině $\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \,:\, x < 0 \vee x > 0, t > \alpha x\}$ a na množině $\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \,:\, x > 0, t < \alpha x\}$ je řešení rovno 1, pro případ b) jsou hodnoty naopak. Na množině Γ není třeba slabé řešení definovat, jde o podmnožinu $\mathbb{R}^2$ nulové míry a v integrální formulaci se neprojeví. Pokusíme se nalézt hodnotu α tak, abychom opravdu měli slabé řešení (prozatím nevíme, zda se hodnoty α nebudou v jednotlivých úlohách lišit).

Uvažujme nejprve případ a). Nechť $\varphi \in C_0^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Potom slabá formulace naší



Obrázek 2.3: Upravený tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě a).



Obrázek 2.4: Upravený tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě b).

úlohy vypadá následovně:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} u_0 \varphi(0, \cdot) \, \mathrm{d}x \\
&= -\int \int_{\{t < \alpha x, t > 0\}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_0^\infty \varphi(0, \cdot) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Počítejme nejdříve první integrál na druhém řádku. Použitím Fubiniho věty máme

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int \int_{\{t < \alpha x, t > 0\}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_0^{\alpha x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \big(\varphi(\alpha x, x) - \varphi(0, x) \big) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Druhý integrál potom budeme počítat následovně

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int\int_{\{t<\alpha x, t>0\}} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_{\frac{t}{\alpha}}^\infty \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\Big(t,\frac{t}{\alpha}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde jsme v poslední rovnosti použili záměnu proměnných $t = \alpha x$. Porovnáním předchozích tří výpočtů dostáváme, že podmínkou, aby naše řešení bylo skutečně slabým řešením původní úlohy a), je, že rovnost

$$
\Big(\frac{\alpha}{2} - 1\Big)\int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,\mathrm{d}x = 0
$$

musí platit pro libovolné $\varphi \in C_0^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Nutně tedy musí být $\alpha = 2$.

Podobně postupujeme i v případě úlohy b). Slabá formulace se redukuje na

$$
0 = -\int\int_{\{\alpha x<t, t>0\}} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x.
$$

První integrál na druhém řádku napravo upravíme následovně

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int\int_{\{\alpha x<t, t>0\}} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \int_{\alpha x}^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^0 \varphi(0,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Druhý integrál potom spočteme v opačném pořadí integrace

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int\int_{\{\alpha x<t, t>0\}} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{t}{\alpha}} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\Big(t,\frac{t}{\alpha}\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde jsme v poslední rovnosti opět použili záměnu proměnných $t = \alpha x$. Porovnáním předchozích tří rovností opět dostáváme, že podmínkou, aby naše řešení bylo skutečně slabým řešením původní úlohy b), je, že rovnost

$$
\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,\mathrm{d}x = 0
$$

musí platit pro libovolné $\varphi \in C_0^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Nutně tedy musí opět být $\alpha = 2$.

Kapitola 3

Převedení rovnic 2. řádu na kanonický tvar. Klasifikace rovnic 2. řádu

Uvažujme obecnou lineární rovnici 2. řádu v N dimenzionálním prostoru. Má tvar

$$\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = F(x), \tag{3.0.1}$$

přičemž předpokládáme, že funkce $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{B_i\}_{i=1}^N$, C a F jsou definovány v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Bez újmy na obecnosti také uvažujeme $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ na Ω.

Definice 3.0.1 (Řešení lineární PDR 2. řádu)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{B_i\}_{i=1}^N$, C a F jsou spojité na Ω, $N \geq 2$. Říkáme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je řešením rovnice (3.0.1), jestliže je pro všechna $x \in \Omega$ splněno

$$\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} B_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + C(x)u(x) = F(x).$$

Fixujme nyní $x_0 \in \Omega$ a proveďme záměnu proměnných

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i. \tag{3.0.2}$$

Potom se člen s derivacemi druhého řádu v rovnici (3.0.1) transformuje na (pokládáme $v(y) = u(x)$ pro y a x svázáno vztahem (3.0.2))

$$\sum_{k,l=1}^{N} \Big(\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(x_0) a_{ki} a_{lj} \Big) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}.$$

Tedy koeficienty stojící u nejvyšší derivace se trasformují stejně jako koeficienty kvadratické formy

$$\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(x_0) z_i z_j \tag{3.0.3}$$

při záměně proměnných

$$z_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i. \tag{3.0.4}$$

Využitím zákona zachování kvadratických forem (důkaz lze nalézt například v elektronických skriptech D. Šmída [Šm LA, Věta 34 Sylvesterův zákon zachování kvadratických forem] pak dostáváme, že existuje regulární zobrazení (3.0.4), které kvadratickou formu (3.0.3) převádí na tvar

$$\sum_{i=1}^{m} e_i y_i^2, \qquad m \le N, \quad c_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Zobrazení typu (3.0.4) není dáno jednoznačně, ale počet kladných, záporných (a tedy i nulových) koeficientů (a tedy i číslo m) jsou důsledkem tvaru kvadratické formy (3.0.3) a nezáleží na tvaru zobrazení (3.0.4).

Proto zobrazení (3.0.2) převádí rovnici (3.0.1) v bodě x_0 na tvar

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x_0) \frac{\partial v}{\partial y_i} + c_i(x_0) v = F(x_0), \tag{3.0.5}$$

kde $e_i = \pm 1$ pro $i = 1, 2, \dots, m$. Tento tvar je ve smyslu počtu kladných a záporných znamének koeficientů e_i a počtu nulových členů určen jednoznačně.

Definice 3.0.2 (Kanonický tvar lineární PDR 2. řádu)**.** Tvar (3.0.5) se nazývá kanonickým tvarem rovnice (3.0.1) v bodě x_0.

Definice 3.0.3 (Klasifikace lineárních PDR 2. řádu v bodě)**.** Parciální diferenciální rovnice (3.0.1) se nazývá
(i) eliptická
(ii) hyperbolická
(iii) ultrahyperbolická
(iv) parabolická v širším smyslu
(v) parabolická
v bodě x_0, je-li v kanonickém tvaru (3.0.5)
(i) $m = N$ a koeficienty e_i mají stejné znaménko
(ii) $m = N$ a všechny koeficienty e_i kromě jednoho mají stejná znaménka
(iii) $m = N$ a alespoň dva koeficienty e_i mají kladné a alespoň dva koeficienty e_i mají záporné znaménko
(iv) $m < N$
(v) $m = N - 1$, všechna e_i, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ mají stejné znaménko a $b_N \neq 0$.

Definice 3.0.4 (Klasifikace lineárních PDR 2. řádu na množině)**.** Parciální diferenciální rovnice (3.0.1) se nazývá eliptická (hyperbolická, ultrahyperbolická, parabolická v širším smyslu, parabolická) na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, jestliže je eliptická (hyperbolická, ultrahyperbolická, parabolická v širším smyslu, parabolická) v každém bodě Ω.

Příklad 3.0.5. (i) Rovnice Poissonova (Laplaceova)

$$\Delta u = f$$

je rovnicí eliptickou.
(ii) Rovnice vlnová

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

je rovnicí hyperbolickou.
(iii) Rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

je rovnicí parabolickou.
(iv) Rovnice může také měnit svůj charakter. Například rovnice Tricomiho

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je eliptická v polorovině $y > 0$ a hyperbolická v polorovině $y < 0$.

Poznámka 3.0.6. V knize [Pe, str. 56–65] (popřípadě pouze pro případ hyperbolické a parabolické rovnice také ve skriptech [JoNe RMF, str. 28–31]) je dokázáno, že v případě dvou prostorových dimenzí lze rovnici

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \cdots = F(x,y) \qquad (3.0.6)$$

pro dostatečně hladké funkce A, B a C takové, že

$$|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| > 0,$$

na jistém okolí bodu (x_0, y_0) převést na kanonický tvar na případně menším okolí tohoto bodu. Přesněji, je-li
(i) $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) > 0$
(ii) $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) < 0$
(iii) existuje $\mathcal{U}(x_0,y_0)$ takové, že $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) = 0$ na tomto okolí,
pak existuje otevřené okolí $V(x_0,y_0)$ a zobrazení $\varphi_1 = \varphi_1(x,y)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x,y)$, které rovnici (3.0.6) převádí na tomto okolí na kanonický tvar, přičemž v případě (i) je rovnice hyperbolická, v případě (ii) eliptická a v případě (iii) parabolická na tomto okolí. V posledním případě musíme ještě zajistit nenulovost příslušného koeficientu u členu s danou derivací prvního řádu.

Je-li $N \geq 3$, pak obecně nelze na okolí daného bodu rovnici převést tímto postupem na kanonický tvar (počet podmínek kladených na tvar kanonického tvaru je větší než počet stupňů volnosti dané úlohy).

Kapitola 4

Rovnice vedení tepla (rovnice parabolického typu)

Rovnice vedení tepla je parciální diferenciální rovnice, která mimo jiné popisuje tepelnou výměnu. Z dalších aplikací je možno zmínit Black–Scholesův model popisující vývoj ceny opcí či popis Brownova pohybu. Ukažme si její odvození pro případ tepelné výměny.

Předpokládejme, že hustotu tepelné energie lze zapsat jako $e = cT$, kde $c = c(t, x, T)$ je měrná tepelná kapacita a T je (termodynamická) teplota. Předpokládejme, že tepelné zdroje jsou popsány pomocí její hustoty $f = f(t, x)$ a tepelný tok splňuje Fourierův zákon vedení tepla, tedy že $\mathbf{q} = -\kappa(t, x, T)\nabla T$, kde κ je tepelná vodivost. Bilanci energie tedy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V cT \,\mathrm{d}x = \int_V f \,\mathrm{d}x - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \,\mathrm{d}S,$$

kde $\mathbf{n}$ je vektor vnější normály k ∂V (proto znaménko mínus před plošným integrálem) a $V \subset \Omega$ je libovolná otevřená podmnožina pevné oblasti Ω s takovou hranicí, aby plošný integrál měl smysl (tedy alespoň třídy $C^{0,1}$). Aplikací Gauss–Ostrogradského věty na plošný integrál máme

$$-\int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\partial V} \kappa\nabla T \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}(\kappa\nabla T) \,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme-li, že funkce jsou tak hladké, že lze provést záměnu časové derivace a integrálu, dostáváme

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(cT) - \operatorname{div}(\kappa\nabla T) - f\right] \mathrm{d}x = 0.$$

Jsou-li všechny vystupující funkce v integrálu alespoň spojité, dostáváme rovnici vedení tepla ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(cT) - \operatorname{div}(\kappa\nabla T) = f,$$

popřípadě, jsou-li c a κ kladné konstanty,

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = g. \tag{4.0.1}$$

Případným přeškálováním času lze dospět ke tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = g. \tag{4.0.2}$$

Touto rovnicí, ať už ve tvaru (4.0.1) či (4.0.2), se teď budeme zabývat.

4.1 Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla

Zabývejme se úlohou

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= f \qquad \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Označme ($t \in (0,T]$, $x \in \Omega$)

$$\begin{aligned} C_l^k((0,T] \times \Omega) := \Big\{ u \in C((0,T] \times \Omega) \, : \, \nabla^i u \in C((0,T] \times \Omega), i = 1,2,\dots,k, \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in C((0,T] \times \Omega), j = 1,2,\dots,l \Big\}. \end{aligned}$$

Klasickým řešením budeme rozumět funkci $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ splňující všude na $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ rovnici $(4.1.1)_1$ a nabývající počáteční podmínku $(4.1.1)_2$ ve smyslu spojitých funkcí.

Nejprve si odvoďme speciální řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \qquad \text{na } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N.$$

Hledejme ho ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\Big(\frac{|x|}{t^\beta}\Big), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dosazením do rovnice získáme ($y = xt^{-\beta}$)

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(|y|) + \beta t^{-(\alpha+1)} |y| v'(|y|) + a^2 t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta_y v(|y|) = 0.$$

Volbou $\beta = \frac{1}{2}$ získáme rovnici pouze v proměnné y. Dále použijeme vztah pro laplacián radiálně symetrické funkce,

$$\Delta_y v(|y|) = v''(|y|) + \frac{N-1}{|y|} v'(|y|),$$

čímž se výše uvedená rovnice transformuje na obyčejnou diferenciální rovnici ($r = |y|$)

$$\alpha v(r) + \frac{1}{2} r v'(r) + a^2 v''(r) + a^2 \frac{N-1}{r} v'(r) = 0.$$

Volbou $\alpha = \frac{N}{2}$ lze rovnici zjednodušit na tvar

$$\left(a^2 r^{N-1} v'(r)\right)' + \left(\tfrac{1}{2} r^N v(r)\right)' = 0 \qquad \text{na } [0, \infty).$$

Integrací a volbou konstanty $C = 0$ (tedy předpokládáme, že limity $\lim_{r\to\infty} r^{N-1} v'(r)$ a $\lim_{r\to\infty} r^N v(r)$ jsou nulové) dostaneme

$$v'(r) = -\frac{1}{2a^2} r v(r),$$

tedy

$$v(r) = B \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Dosazením za α, β a r dostáváme

$$u(t, x) = B t^{-\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Z technických důvodů, které objasníme níže, položíme $B = \frac{1}{(4\pi a^2)^{\frac{N}{2}}}$. Získali jsme

Definice 4.1.1 (Fundamentální řešení rovnice vedení tepla)**.** Funkci

$$U(t, x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N, t \le 0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

nazýváme fundamentálním řešením rovnice vedení tepla.

Lemma 4.1.2. *Pro libovolné $t > 0$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^N} U(t, x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Důkaz. Přímým výpočtem využívajícím záměnu proměnných $\frac{x}{2a\sqrt{t}} = y$ dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} U(t, x)\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|y|^2}\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|z|^2}\, \mathrm{d}z \right)^N = 1. \end{aligned}$$

□

Poznámka 4.1.3. Funkce U je singulární v bodě $x = 0$, $t = 0$, mimo je hladká. Ve skutečnosti, ve smyslu distribucí (popřípadě temperovaných distribucí) na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ splňuje

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\Delta U = 0, \qquad U(0,x) = \delta_0(x),$$

kde δ_0 je Diracova δ-distribuce s nosičem v počátku.

Vezměme nyní speciální případ úlohy (4.1.1), kdy $f = 0$. Potom máme

Věta 4.1.4 (O řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou)**.** *Nechť* $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a nechť*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} U(t,x-y)u_0(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y,$$

$x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$. *Potom*

(i) $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$

(ii)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0 \qquad \textit{na } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N.$$

(iii)

$$\lim_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N\to(0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0) \qquad \textit{pro všechna } x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že díky omezenosti funkce u_0 je funkce $u(t,x)$ definovaná výše nekonečněkrát spojitě diferencovatelná (snadno můžeme lokálně konstruovat integrovatelné majoranty pro Větu o derivaci integrálu podle parametru aplikovanou na jednotlivé parciální derivace) a platí pro ni

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\Big)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{\partial U(t,x-y)}{\partial t} - a^2\Delta_x U(t,x-y)\Big)u_0(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

neboť U splňuje na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ rovnici vedení tepla s nulovou pravou stranou. Ověřme splnění počáteční podmínky. Pokud je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}^N$, požadovaný výsledek plyne z formule (předpokládáme, že $x_k \to x_0$ v $\mathbb{R}^N$ a $t_k \to 0_+$)

$$\begin{aligned}|u(t_k,x_k) - u_0(x_0)| &= \Big|\frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|z|^2}u_0(x_k - 2\sqrt{t_k}z)\,\mathrm{d}z - u_0(x_0)\Big| \\ &= \Big|\frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|z|^2}(u_0(x_k - 2\sqrt{t_k}z) - u_0(x_0))\,\mathrm{d}z\Big| \overset{k\to\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

kde jsme si vypomohli Lebesgueovou větou o majorizované konvergenci s majorantou $2M\pi^{-N/2}\mathrm{e}^{-|z|^2}$, $M = \sup_{\mathbb{R}^N}|u_0|$. Konečně splnění počáteční podmínky ve smyslu limity výše plyne aplikací Heineho věty. Protože u_0 je spojitá na $\mathbb{R}^N$, věta je dokázána. $\square$

Poznámka 4.1.5. Je-li funkce u_0 v nějakém bodě nespojitá (ale stále omezená na $\mathbb{R}^N$, nespojitost může být v konečném počtu bodů), pak tvrzeni (i) a (ii) z předchozí věty zůstávají v platnosti a ke změně dochází pouze u bodu (iii). To platí pouze v těch bodech, ve kterých je u_0 spojitá. Je tedy rozumné takovou funkci nazvat řešením naší úlohy (i když ne nutně klasickým) a má smysl takové počáteční podmínky brát do úvahy.

Předchozí poznámky využijeme k demonstraci jistého speciálního chování řešení rovnice vedení tepla.

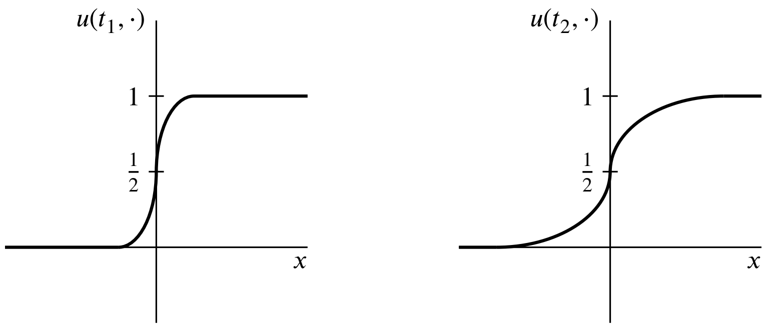
Příklad 4.1.6. (i) Řešme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,T)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= H(x) && \text{na } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde H je Heavisideova funkce, tedy konstantní 1 pro $x > 0$ a 0 pro $x < 0$.

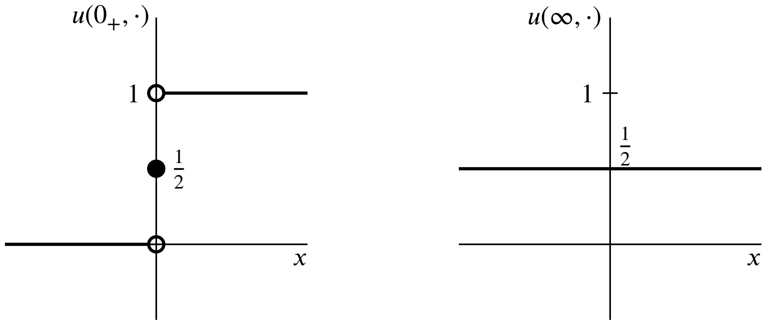
Věta o řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou (Věta 4.1.4) kombinovaná s Poznámkou 4.1.5 nám dává řešení tvaru (použijeme substituci $z = \frac{x-y}{2\sqrt{t}}$)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(y)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla v jedné dimenzi s nespojitou počáteční podmínkou v časech $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

Všimněme si, že toto řešení má následující vlastnosti. Pro $t \to 0_+$ se blíží k funkci, která je nulová pro $x < 0$ a rovná jedné pro $x > 0$. V počátku je příslušná limita nespojitá. Tedy počáteční podmínka je splněna (ve smyslu limity funkčních hodnot) ve všech bodech kromě počátku. Pro libovolný čas $t > 0$ má řešení v bodě $x = 0$ hodnotu $\frac{1}{2}$ a pro čas jdoucí do nekonečna se řešení blíží ke konstantnímu řešení $u \equiv \frac{1}{2}$.



Obrázek 4.2: Asymptotika řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla v jedné dimenzi s nespojitou počáteční podmínkou pro $t \to 0_+$ (vlevo) a $t \to \infty$ (vpravo).

Tento příklad ukazuje na jeden aspekt rovnice vedení tepla a tím je *nekonečná rychlost šíření signálu*. Všimněme si u příkladu výše, že bod „libovolně blízko“ mínus nekonečna v libovolně krátkém čase „ví“ o tom, že počáteční podmínka na $\mathbb{R}^+$ byla rovna jedné. Analogicky pro body „poblíž“ plus nekonečna.

Nyní se podíváme na řešení nehomogenní úlohy, tedy na

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u &= f \qquad \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \quad 0 < T \le \infty \\ u(0,x) &= 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Ke konstrukci vztahu pro řešení použijeme Duhamelův princip. Připomeňme, že pro pevné $s \in (0,T)$ funkce

$$v(t,x;s) := \int_{\mathbb{R}^N} U(t-s,x-y)f(y,s)\,\mathrm{d}y$$

řeší

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2\Delta v &= 0 \qquad \text{na } (s,\infty)\times\mathbb{R}^N \\ v(s,x;s) &= f(x,s) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Duhamelův princip pak říká, že řešení úlohy (4.1.3) lze získat pomocí řešení úlohy (4.1.4) integrací přes s, tedy

$$u(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Dostáváme tedy následující vztah pro řešení úlohy (4.1.3)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} U(t-s,x-y)f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi a^2(t-s))^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Ukažme, že za jistých předpokladů na hladkost funkce f (to lze výrazně zeslabit, ale nebudeme to dělat) dává tento vztah skutečně klasické řešení úlohy (4.1.3).

Věta 4.1.7 (O řešení rovnice vedení tepla s netriviální pravou stranou)**.** *Nechť* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f \in C_1^2([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ *a* f *má na této množině kompaktní nosič, pak funkce zadaná předpisem* (4.1.5) *splňuje*

(i) $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N)$

(ii)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \qquad \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N$$

(iii)

$$\lim_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N \to (0,x_0)} u(t,x) = 0 \qquad \text{pro všechna } x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Důkaz. Nechť f splňuje předpoklady věty. Máme formálně

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} U(s,y) f(t-s, x-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s.$$

Nejprve si ukažme, že konvoluce je dobře definovaná (neboli Lebesgueův integrál konverguje). Pišme (korektnost provedených úprav je vidět při čtení zprava doleva)

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{(4\pi a^2 (t-s))^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(s,y) \right| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{(4\pi a^2 s)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4a^2 s}} f(t-s, x-y) \right| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,t)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{(4\pi a^2 s)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4a^2 s}} f(t-s, x-y) \right| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{(0,t)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-|z|^2} f(t-s, x-2\sqrt{s} a z) \right| \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}s \\
&\le \int_{(0,t)} \sup_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} |f| \, \mathrm{d}s = t \sup_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} |f|.
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že funkce u je pro všechna $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N$ dobře definovaná. Zároveň jsme také dostali potřebný odhad veličiny $\sup_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} |u|$. Tento odhad má navíc za následek, že

$$|u(t,x)| \le Ct \overset{t\to 0_+}{\to} 0.$$

Proto je počáteční podmínka splněna dokonce prostřednictvím stejnoměrné konvergence.

Dále díky výše ukázaným úpravám se snadno nahlédne, že s využitím omezenosti parciálních derivací funkce f uvedených ve znění věty je možné lokálně používat Větu o derivaci integrálu podle parametru. Proto má u požadovanou hladkost v prostorových proměnných (pro spojitost $\frac{\partial u}{\partial t}$ využijeme rovnost $\frac{\partial u}{\partial t} = f + \Delta u$ odvozenou níže).

Zbývá ještě ověřit rovnost $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$. Integrál si přepíšeme pomocí lineární záměny proměnných a pak použijeme na získané integrály obvyklé úpravy a informace. Po aplikaci Fubiniho věty je vnější integrál Riemannův, lze proto na něj aplikovat standardní proceduru derivování podle horní meze. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) \\
&\quad= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} U(s,y)\Big[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big] f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^N} U(t,y) f(0,x-y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} U(s,y)\Big[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta\Big] f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\qquad\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} U(s,y)\Big[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta\Big] f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^N} U(t,y) f(0,x-y)\,\mathrm{d}y =: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K.
\end{aligned}$$

Zřejmě

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon| &\le \Big(\Big\|\frac{\partial f}{\partial t}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)} + \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)}\Big) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} U(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \Big(\Big\|\frac{\partial f}{\partial t}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)} + \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)}\Big) \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|z|^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s \le C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
|I_\varepsilon| &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{\partial}{\partial s} - \Delta\Big] U(s,y) f(t-s,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N} U(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N} U(t,y) f(0,x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} U(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,\mathrm{d}y - K.
\end{aligned}$$

Proto, díky stejnému argumentu jako ve Větě o řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou (Věta 4.1.4)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\mathbb{R}^N} U(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\,\mathrm{d}y = f(t,x).$$

To jsme chtěli ukázat. □

4.2 Princip maxima a další vlastnosti Cauchyovy úlohy rovnice vedení tepla

V celé této kapitole bude předpokládat $a = 1$. Obecný případ $a > 0$ lze získat přeškálováním času.

Označení 4.2.1. Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ otevřená a $0 < T < \infty$ definujme parabolický válec $Q_T := (0,T]\times\Omega$ a $\Gamma_T := \overline{Q_T}\setminus Q_T$ jeho parabolickou hranici. Konečně pro $(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r > 0$ označme jako tepelnou kouli množinu

$$E(t,x;r) := \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \ : \ s < t, U(t-s,x-y) \geq \frac{1}{r^N}\right\},$$

kde $U(t,x)$ je fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Všimněme si, že body z množiny $\{T\} \times \Omega$ do parabolického válce patří, tedy Γ_T obsahuje $\{0\} \times \overline{\Omega}$ a $(0,T] \times \partial\Omega$.

Platí

Věta 4.2.2 (O střední hodnotě pro rovnici vedení tepla)**.** *Nechť $u \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ řeší na Q_T rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$. Potom*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^N}\int\int_{E(t,x;r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{|t-s|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \qquad \textit{pro všechna } E(t,x;r) \subset Q_T.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze brát $x = 0$ a $t = 0$, stačí pouze vhodně posunout počátek souřadné soustavy. Označme tedy $E(r) := E(0,0;r)$ a položme

$$\Phi(r) := \frac{1}{r^N}\int\int_{E(r)} u(s,y)\frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \int\int_{E(1)} u(r^2\tau, rz)\frac{|z|^2}{\tau^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau.$$

Ve druhé rovnosti jsme použili záměnu proměnných $s = r^2\tau$ a $y = rz$ jakož i tvaru funkce U. Máme (ve druhé rovnosti použijeme opačnou záměnu proměnných než výše)

$$\begin{aligned}\Phi'(r) &= \int\int_{E(1)}\Big(\sum_{i=1}^N z_i\frac{\partial u}{\partial y_i}(r^2\tau,rz) + 2r\tau\frac{\partial u}{\partial s}(r^2\tau,rz)\Big)\frac{|z|^2}{\tau^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{1}{r^{N+1}}\int\int_{E(r)}\Big(\sum_{i=1}^N y_i\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{|y|^2}{s^2} + 2\frac{\partial u}{\partial s}\frac{|y|^2}{s}\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s =: A + B.\end{aligned}$$

Definujme ještě

$$\Psi(s,y,r) := -\frac{N}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + N\log r.$$

Všimněme si, že $\Psi = 0$ na $\partial E(r)$, neboť na této množině je $U(-s,-y) = r^{-N}$. Proto $\frac{1}{\left(4\pi(-s)\right)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{|y|^2}{4s}} = \frac{1}{r^N}$, tedy $\frac{|y|^2}{4s} = \log(-4\pi s)^{\frac{N}{2}} - \log r^N$. Použitím této rovnosti máme (v proměnné y aplikujeme první z Greenových identit, tedy Větu 1.3.5 bod (i))

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} 2\frac{\partial u}{\partial s}\frac{|y|^2}{s}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} 4\frac{\partial u}{\partial s}\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} 4N\frac{\partial u}{\partial s}\Psi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} 4\Psi \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y_i} y_i\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Nyní budeme integrovat per partes vzhledem k s a dostáváme

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} \Big(-4N\frac{\partial u}{\partial s}\Psi + 4\frac{\partial \Psi}{\partial s}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} \Big[-4N\frac{\partial u}{\partial s}\Psi + 4\Big(-\frac{N}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\Big)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\Big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} \Big(-4N\frac{\partial u}{\partial s}\Psi - \frac{2N}{s}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s - A.
\end{aligned}
$$

Celkem tedy, použitím rovnice pro u

$$
\begin{aligned}
\Phi'(r) = A + B &= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} \Big(-4N\Delta u\Psi - \frac{2N}{s}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{r^{N+1}} \int\int_{E(r)} \Big(4N\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} - \frac{2N}{s}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned}
$$

Proto je $\Phi(r)$ konstantní a díky spojitosti funkce u v počátku máme

$$
\Phi(r) = \lim_{t\to 0_+}\Phi(t) = u(0,0)\lim_{t\to 0_+}\Big(\frac{1}{t^N}\int\int_{E(t)}\frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\Big) = 4u(0,0),
$$

neboť

$$
\frac{1}{t^N}\int\int_{E(t)}\frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \int\int_{E(1)}\frac{|z|^2}{\tau^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau = 4.
$$

Abychom ukázali poslední rovnost, uvědomme si, že

$$
E(1) = \Big\{(\tau, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \,:\, -\frac{1}{4\pi} \le \tau < 0, |z|^2 \le 2N\tau\log(-4\pi\tau)\Big\}.
$$

Záměnou proměnných $(\tau, z) \mapsto (t, z)$, kde $t = \log(-4\pi\tau)$, máme, že $E(1) \to \widetilde{E}(1)$, kde

$$
\widetilde{E}(1) = \Big\{(t, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \,:\, t \in (-\infty, 0], |z|^2 \le \frac{-N}{2\pi}t\mathrm{e}^t\Big\}.
$$

Počítejme (κ_N je povrch jednotkové sféry v N-dimenzionálním prostoru), přičemž níže provádíme jen standardní úpravy jako přechod do zobecněných sférických souřadnic, záměnu proměnných a nakonec využijeme definici a základní vlastnosti funkce Γ

$$\begin{aligned}
\int\int_{E(1)} \frac{|z|^2}{\tau^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau &= \int_{-\infty}^{0}\int_{|z|^2\le\frac{-N}{2\pi}te^t} 4\pi|z|^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi\kappa_N\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\sqrt{-\frac{N}{2\pi}te^t}} r^{N+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4\pi\kappa_N}{N+2}\Big(\frac{N}{2\pi}\Big)^{\frac{N+2}{2}}\int_{-\infty}^{0}(-t)^{\frac{N+2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{N}{2}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4\pi\kappa_N}{N+2}\Big(\frac{N}{2\pi}\Big)^{\frac{N+2}{2}}\Big(\frac{2}{N}\Big)^{\frac{N+4}{2}}\int_{0}^{\infty}s^{\frac{N+2}{2}}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{8\pi\kappa_N}{N(N+2)}\Big(\frac{1}{\pi}\Big)^{\frac{N+2}{2}}\Gamma\Big(\frac{N}{2}+2\Big) = 2\kappa_N\Big(\frac{1}{\pi}\Big)^{\frac{N}{2}}\Gamma\Big(\frac{N}{2}\Big) = 4,
\end{aligned}$$

neboť $\kappa_N = N\lambda_N(B_1) = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$. Tedy celkem (pokud přejdeme zpět do obecného bodu (t,x))

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^N}\int\int_{E(t,x;r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

□

Výše dokázanou rovnost použijeme k získání následujícího zásadního výsledku. Bod (i) se často nazývá slabým principem maxima, bod (ii) silným.

Věta 4.2.3 (Princip maxima pro rovnici vedení tepla)**.** *Nechť $u \in C_1^2(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$ řeší v Q_T rovnici $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$.*
(i) *Je-li Ω omezená, platí* $\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.
(ii) *Je-li Ω souvislá (ne nutně omezená) a existuje $(t_0,x_0)\in Q_T$ takové, že platí $u(t_0,x_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$, potom je u konstantní na $\overline{Q}_{t_0}$.*

Důkaz. Krok 1: silný princip maxima na úsečce
Předpokládejme, že existuje bod $(t_0,x_0)\in Q_T$ takový, že $u(t_0,x_0) = M := \max_{\overline{Q_T}} u$. Potom pro dostatečně malé $r>0$ množina $E(t_0,x_0;r)\subset Q_T$ a použitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned}
M = u(t_0,x_0) &= \frac{1}{4r^N}\int\int_{E(t_0,x_0;r)} u(y,s)\frac{|x_0-y|^2}{|t_0-s|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{M}{4r^N}\int\int_{E(t_0,x_0;r)}\frac{|x_0-y|^2}{|t_0-s|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = M,
\end{aligned}$$

neboť

$$\frac{1}{4r^N}\int\int_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{|t_0-s|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = 1,$$

jak plyne z výpočtu na konci důkazu Věty o střední hodnotě pro rovnici vedení tepla (Věta 4.2.2). Proto $u(y,s) = M$ pro všechna $(y,s) \in E(t_0,x_0;r)$; kdyby tomu tak nebylo v nějakém bodě $(\widetilde{s},\widetilde{y}) \in E(t_0,x_0;r)$, pak díky spojitosti funkce u by muselo být $u(s,y) < M$ na nějakém netriviálním okolí bodu $(\widetilde{s},\widetilde{y})$. Pak by ale nemohla nastat výše uvedená rovnost.

Vezměme si nyní libovolnou úsečku L ležící v Q_T spojující (t_0,x_0) s nějakým jiným bodem $(s_0,y_0) \in Q_T$, přičemž $s_0 < t_0$. Definujme

$$r_0 := \min\{s \in \mathbb{R} : s \geq s_0, u(t,x) = M\ \forall (t,x) \in L, s \leq t \leq t_0\}.$$

Protože u je spojitá, minimum existuje. Předpokládejme, že $r_0 > s_0$. Potom $u(r_0,z_0) = M$ pro nějaký bod $(r_0,z_0) \in L \cap Q_T$, takže $u \equiv M$ na $E(r_0,z_0;\varrho)$ pro jisté kladné (dostatečně malé) ϱ. Protože $E(r_0,z_0;\varrho)$ obsahuje $L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$ pro dostatečně malé $\sigma > 0$, dostáváme spor s definicí r_0. Proto $r_0 = s_0$ a $u \equiv M$ na L.

Krok 2: silný princip maxima

Fixujme $x \in \Omega$ a $0 \leq t \leq t_0$. Potom tento bod x můžeme spojit lomenou čarou s bodem x_0 tak, že koncové body úseček tvoří body $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = x\}$, $x_i \neq x_{i-1}$ pro $i \in \{1,2,\dots,m\}$ a všechny úsečky leží v Ω. Zvolme $t_0 > t_1 > \dots t_{m-1} > t_m = t$. Potom lze (v $\mathbb{R}^{N+1}$) spojit body (t_{i-1},x_{i-1}) s (t_i,x_i), $i = 1,2,\dots,m$ tak, že příslušné úsečky leží v Q_T. Podle Kroku 1 je $u \equiv M$ na každé úsečce, tedy $u(t,x) = M$.

Krok 3: slabý princip maxima

Na závěr si stačí uvědomit, že díky spojitosti u hodnota $\max_{\overline{Q_T}} u$ existuje a je konečná. Buď se nabývá ve vnitřním bodě či pro $t_0 = T$, $x \in \Omega$, pak je ale funkce u konstantní na $\overline{Q}_{t_0}$, nebo se nabývá mimo tuto množinu, tedy na Γ_T. □

Později si ukážeme, že tento výsledek implikuje jednoznačnost řešení jisté okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla. My se ale nyní budeme věnovat Cauchyově úloze pro rovnici vedení tepla (tedy úloze na celém $\mathbb{R}^N$); tam je situace komplikovanější, jak plyne z následujícího výsledku.

Ukažme si totiž, že obecně není řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, tedy úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

určeno jednoznačně. K tomu stačí ukázat, že pro $f \equiv 0$ na $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ a $u_0 \equiv 0$ na $\mathbb{R}^N$ existuje netriviální řešení této úlohy. Konstrukci předvedeme pro $N = 1$.

Příklad 4.2.4. Zkonstruujme netriviální řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,T)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hledejme ho ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(t)x^j.$$

Zvolme $h_0(t) := h(t)$ pevně (netriviální funkce) a $h_1(t) \equiv 0$. Aby daná řada formálně řešila rovnici vedení tepla, porovnáním koeficientů dostáváme rekurentní vztah

$$h_j'(t) = (j+2)(j+1)h_{j+2}(t),$$

tedy

$$h_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!}h^{(k)}(t), \qquad k = 0,1,2,\dots, \qquad\qquad h_{2k+1} = 0, \qquad k = 0,1,2,\dots.$$

Dosazením do tvaru řady máme

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!}x^{2k}.$$

Tato funkce je netriviální (pro $x = 0$ je $u(t,0) = h(t)$). Pokud zvolíme pro jisté $\alpha > 1$

$$h(t) := \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}} & t > 0, \end{cases}$$

pak je možné ukázat, že existuje $\Theta = \Theta(\alpha) > 0$ tak, že

$$|h^{(k)}(t)| \le \frac{k!}{(\Theta t)^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}}, \qquad t > 0, \quad k = 1,2,\dots.$$

Proto daná řada funkcí konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)\times\mathbb{R}$. Dostáváme tedy, že $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$, $\lim_{t\to 0_+} u(t,x) = 0$ (a po tomto dodefinování je dokonce $u \in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$) a rovnice vedení tepla je splněna bodově. Získali jsme tedy dokonce nespočetně mnoho řešení rovnice vedení tepla s nulovou počáteční podmínkou a nulovou pravou stranou (pro libovolné reálné $\alpha > 1$).

Nicméně, i přes nepříliš optimistický výsledek předchozího příkladu je možno ukázat na jisté třídě funkcí jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla. Platí totiž, že řešení z předchozího příkladu (pocházející od A. Tichonova [Ti]) rostou na nekonečnu velice rychle, rychleji než $\mathrm{e}^{|x|^2}$. Konkrétně, vhodnou volbou funkce h_0 lze ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje řešení Cauchyovy úlohy s nulovými daty pro rovnici vedení tepla takové, že $|u(t,x)| \le C\mathrm{e}^{|x|^{2+\varepsilon}}$. Toho dále využijeme při konstrukci vhodné třídy funkcí, ve které je řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla určeno jednoznačně. Nejprve ukažme, že na vhodné třídě funkcí splňují řešení Cauchyovy úlohy princip maxima.

Věta 4.2.5 (O principu maxima pro Cauchyovu úlohu rovnice vedení tepla)**.** *Nechť* $u \in C_1^2((0,T]\times\mathbb{R}^N) \cap C_0^0([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ *řeší*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \textit{na } (0,T]\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) && \textit{na } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

a splňuje růstovou podmínku

$$|u(t,x)| \le A\mathrm{e}^{a|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ 0 \le t \le T$$

pro a, $A > 0$ konstanty. Potom

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^N} u = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0.$$

Důkaz. Krok 1: princip maxima na krátkém intervalu pro modifikovanou funkci Předpokládejme, že $4aT < 1$, kde $a > 0$ je konstanta z růstové podmínky ve znění věty. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $4a(T+\varepsilon) < 1$. Fixujme $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ a položme

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Zřejmě (výpočet je analogický jako v případě, kdy chceme totéž ověřit pro fundamentální řešení rovnice vedení tepla)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \qquad \text{na } (0,T] \times \mathbb{R}^N.$$

Fixujme $r > 0$ a označme $\Omega = B_r(y)$, $Q_T = (0,T] \times B_r(y)$. Potom podle Věty o principu maxima pro rovnici vedení tepla (Věta 4.2.3)

$$\max_{\overline{Q}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Fixujme $x \in \mathbb{R}^N$. Potom

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \le u(0,x) = u_0(x).$$

Pro $|x-y| = r$, $0 \le t \le T$ tedy máme

$$\begin{aligned} v(t,x) = u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} &\le A\mathrm{e}^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ \le A\mathrm{e}^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Protože $\frac{1}{4a(T+\varepsilon)} > 1$, existuje $\gamma > 0$ tak, že $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} > a + \gamma$. Tedy

$$v(t,x) \le A\mathrm{e}^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{(a+\gamma)r^2} \le \sup_{\mathbb{R}^N} u_0$$

pokud zvolíme r dostatečně velké. Pak totiž $\mathrm{e}^{a(|y|+r)^2}$ roste v r pomaleji než $\mathrm{e}^{(a+\gamma)r^2}$. Proto volbou vhodného $r > 0$, za předpokladu $4aT < 1$, dostáváme pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$ a $0 \le t \le T$, že $v(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^N} u_0$.

Krok 2: princip maxima na krátkém časovém intervalu pro řešení rovnice vedení tepla
Pokud princip maxima platí pro libovolné $\mu > 0$, lze provést limitu $\mu \to 0_+$. Tím dostaneme dokazovaný princip maxima pro funkci u.
Krok 3: princip maxima pro libovolný časový interval
V obecném případě, kdy $4aT \geq 1$, dokážeme tvrzení nejprve na intervalu $[0, T_1]$, kde $4aT_1 < 1$, pak pokračujeme na $[T_1, 2T_1]$ atd., až po konečném počtu kroků dokážeme tvrzení na intervalu $[0, T]$. □

Cvičení 4.2.6. Ověřte, že funkce

$$w(t,x) := \frac{1}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

řeší na $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0.$$

Z předchozí věty plyne

Věta 4.2.7 (Jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla)**.** *Nechť* $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$*,* $f \in C_0^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$*. Potom existuje nejvýše jedno řešení úlohy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

takové, že $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^N) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ *a splňuje pro jistá* a*,* $A > 0$ *růstovou podmínku*

$$|u(t,x)| \leq A\mathrm{e}^{a|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t \leq T.$$

Důkaz. Nechť u_1 a u_2 jsou dvě řešení dané úlohy. Potom $u_1 - u_2$ a $u_2 - u_1$ splňují předpoklady Věty o principu maxima pro Cauchyovu úlohu rovnice vedení tepla (Věta 4.2.5) s nulovými daty, tedy $|u_1 - u_2| = 0$ na $[0,T] \times \mathbb{R}^N$. □

Poznámka 4.2.8. Předchozí věta tedy ukazuje, že řešení zkonstruovaná v Příkladu 4.2.4 musí mít na nekonečnu růst rychlejší než $\mathrm{e}^{a|x|^2}$.

Shrňme výše získané výsledky. Jestliže $u_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f \in C_1^2([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ a všechny první a druhé prostorové derivace má funkce f omezené, pak explicitní předpis pro řešení Cauchyovy úlohy rovnice vedení tepla s pravou stranou f a počáteční podmínkou u_0 má tvar

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ & + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Toto řešení zcela jistě splňuje předpoklady předchozí věty a tudíž jde o jednoznačné řešení Cauchyovy úlohy rovnice vedení tepla na třídě funkcí s růstem nejvýše $e^{a|x|^2}$. Navíc je rovnice splněna ve smyslu rovnosti spojitých funkcí a počáteční hodnota je splněna ve smyslu bodové limity $x \to x_0$ a $t \to 0_+$.

4.3 Okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla

Nyní se budeme zabývat úlohou

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{na } (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s neprázdnou hranicí. Abychom získali jednoznačné řešení, je nutné dodat informaci o chování funkce u na $\partial\Omega$. Existuje několik možných fyzikálně rozumných zadání této podmínky, které vedou na korektně zadanou úlohu („well-posed problem“). To znamená, že pro rozumnou třídu dat existuje právě jedno řešení dané úlohy, které navíc závisí na datech spojitě. Tento pojem pochází od J. Hadamarda.

Budeme předpokládat, že f je dostatečně regulární na množině $\overline{Q_T} = [0,T] \times \overline{\Omega}$ a hledejme tedy řešení splňující alespoň $u \in C_1^2(Q_T) \cap C([0,T) \times \Omega)$. Budeme uvažovat následující možnosti okrajových podmínek

$$u(t,x) = g(t,x) \qquad \text{pro } t \in (0,T) \text{ a } x \in \partial\Omega$$

(podmínku obvykle chápeme ve smyslu limity funkčních hodnot). Tomuto typu podmínky se říká *Dirichletova podmínka* a celé úloze se pak říká *Dirichletova úloha pro rovnici vedení tepla*. Tento případ odpovídá umístění zkoumaného tělesa do prostředí se zadanou teplotou. Typickým příkladem je umístění čerstvě zabitého (a staženého) králíka do mrazničky.

Další často používanou podmínkou je *Neumannova podmínka*

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(t,x) = h(t,x) \qquad \text{pro } t \in (0,T) \text{ a } x \in \partial\Omega,$$

kde $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ zastupuje derivaci ve směru jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$ (pro hladkou funkci u platí $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(t,x) = \nabla u(t,x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)$). My zde budeme předpokládat, že funkce u je tak hladká, aby výraz $\nabla u(t,x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)$ měl na $\partial\Omega$ dobrý smysl. Naše podmínka tentokrát popisuje tepelný tok přes hranici tělesa. Případu $h \equiv 0$ odpovídá chování (horkého) čaje v ideální termosce.

Představme si ještě *Newtonovu podmínku* (v jisté části matematické komunity, zejména té francouzské, se jí často říká *Robinova podmínka*)

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(t,x) + \kappa(u(t,x) - g(t,x)) = h(t,x) \qquad \text{pro } t \in (0,T) \text{ a } x \in \partial\Omega.$$

Pro $h \equiv 0$ tato podmínka znamená, že tepelný tok přes hranici tělesa je přímo úměrný rozdílu teplot mezi tělesem a prostředím, v němž se nachází. Symbol $\kappa > 0$ zde zastupuje tepelnou vodivost. Typickým příkladem je umístění čerstvě zabitého a staženého králíka do předem vychlazené termotašky, případně chování čaje v termosce, která není ideální. Jiný případ je proudění horké páry v potrubí, které není dokonale tepelně izolované. Budeme předpokládat, že výraz $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ má stejný smysl jako u Neumannovy podmínky.

Shrňme si tedy požadavky na hladkost řešení jednotlivých úloh. Po klasickém řešení rovnice řešení tepla požadujeme, aby splňovalo $\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta u \in C((0,T] \times \Omega)$ a $u \in C([0,T] \times \Omega)$ (kvůli počáteční podmínce). Navíc požadujeme ještě hladkost odpovídající zvolené okrajové podmínce:
(i) $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega})$ v případě Dirichletovy podmínky
(ii) pro každé pevné $t \in [0,T]$ je možné funkci a všechny prostorové parciální derivace prvního řádu spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$ v případě Neumannovy podmínky
(iii) bod (ii) platí i v případě Newtonovy podmínky.

Poznámka 4.3.1. (i) Je-li u klasickým řešením Dirichletovy úlohy na omezené oblasti, pak je funkce $x \mapsto u(t,x)$ automaticky omezená pro každé $t \in [0,T]$.
(ii) Je-li u klasickým řešením Neumannovy úlohy, pak kromě (i) jsou funkce $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)$ automaticky omezené pro každé $t \in [0,T]$ a $i \in \{1,\ldots,N\}$.
(iii) Je-li u klasickým řešením Newtonovy (Robinovy) úlohy, pak splňuje oba typy omezenosti zmíněné výše; totéž splňuje i v případě (ii), v tom případě to ale není nutné z hlediska formulace dané okrajové podmínky.

Každá ze tří uvedených podmínek nám již zaručuje jednoznačnost ve třídě dostatečně rozumných funkcí. Nejprve si ale ukažme tento výsledek pro Dirichletovu úlohu, kde lze s výhodou použít stejnou myšlenku jako pro Cauchyovu úlohu.

Věta 4.3.2 (Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla)**.** *Za výše uvedených předpokladů existuje nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla.*

Důkaz. Nechť u_1 a u_2 jsou dvě řešení Dirichletovy úlohy. Potom $u := u_1 - u_2$ řeší:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{na } (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) &= 0 && \text{na } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } (0,T) \times \partial\Omega, \end{aligned}$$

přičemž $u \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$. Proto dle Věty o principu maxima pro rovnici vedení tepla (Věta 4.2.3) platí

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u = 0.$$

Analogicky, pro funkci $-u$ dostaneme, že $\max_{\overline{Q_T}}(-u) = 0$, což dává $u \equiv 0$ na množině $\overline{Q_T}$. □

Druhou možností, jak dokazovat jednoznačnost řešení (nejen pro Dirichletovu úlohu) je tzv. energetická metoda. Název pochází z toho, že vlastně budeme odhadovat nalevo hodnotu funkcionálu, který lze pro některé úlohy (ne však pro rovnici vedení tepla) identifikovat s jistou energií systému.

Věta 4.3.3 (O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro rovnici vedení tepla)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy C^1 (aby normálový vektor existoval ve všech bodech hranice). Pak pro každou z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících*

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^\infty((0,T_0)\times\Omega) \qquad \textit{pro všechna } i \in \{1,\dots,N\} \quad \textit{a každé } T_0 \in (0,T) \tag{4.3.1}$$

a

$$x \mapsto u(t,x), x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x), x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \qquad \textit{pro všechna } i \in \{1,\dots,N\} \quad \textit{a každé } t \in (0,T). \tag{4.3.2}$$

Důkaz. Předpokládejme, že máme dvě klasická řešení u_1, u_2 uvedených vlastností. Položme $u := u_1 - u_2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \qquad \text{na } (0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= 0 \qquad \text{na } \Omega, \end{aligned}$$

a

$$u = 0 \qquad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \qquad \text{(pro Dirichletovu podmínku)},$$

nebo

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \qquad \text{(pro Neumannovu podmínku)},$$

nebo

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \kappa u = 0 \qquad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \qquad \text{(pro Newtonovu/Robinovu podmínku)}.$$

Zafixujme libovolné $T_0 \in (0,T)$. Pro každé $t \in (0,T_0)$ vynásobme diferenciální rovnici funkcí u a integrujme přes Ω (rozdělení integrálu na dva můžeme provést díky (4.3.1) a Hölderově nerovnosti)

$$0 = \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\Big) u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u u \, \mathrm{d}x.$$

Nyní si upravíme integrály na pravé straně. Jednak díky Větě o derivaci integrálu podle parametru (integrovatelnou majorantu umíme zkonstruovat díky (4.3.1)) máme

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x.$$

Na druhý integrál jsme díky (4.3.2) a předpokládaným kvalitám $\partial\Omega$ oprávněni použít Greenovu identitu (ii) z Věty 1.3.5, kde v případě Dirichletovy a Neumannovy podmínky plošný integrál vymizí (v těchto případech za účelem jednotného zápisu definujme $\kappa = 0$). Dostáváme

$$\int_\Omega \Delta u u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} u \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = -\kappa \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x.$$

Celkově proto máme

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \kappa \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}S = 0.$$

Teď už stačí jen integrovat získanou rovnost přes $(0, T_0)$ a dostáváme (využíváme také $u(0, x) = 0$)

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u^2(T_0, x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{T_0} \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}t + \kappa \int_0^{T_0} \Big(\int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}S \Big) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Odtud díky nezápornosti všech tří integrálů, spojitosti funkce u, nezápornosti κ a tomu, že $T_0 \in (0, T)$ bylo libovolné, máme

$$u \equiv 0 \qquad \text{na } [0, T] \times \overline{\Omega}.$$

□

Zbytek oddílu je věnován návodům na řešení několika základních typů okrajových úloh rovnice vedení tepla. V těchto úlohách bude mít vždy množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, odkud bereme prostorovou proměnnou, velmi speciální podobu.

Nejprve se zabývejme případem, kdy $N = 1$ a $\Omega = (0, \infty)$. Budeme zde zkoumat Dirichletovu úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f && \text{na } (0, T) \times (0, \infty) \\ u(0, x) &= u_0 && \text{na } (0, \infty) \\ u(t, 0) &= 0 && \text{na } (0, T) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

a Neumannovu úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f && \text{na } (0, T) \times (0, \infty) \\ u(0, x) &= u_0 && \text{na } (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= 0 && \text{na } (0, T). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

V prvním případě je výhodné počáteční podmínku prodloužit liše na $\mathbb{R}$, ve druhém případě sudě a tím přejít k případu $\Omega = \mathbb{R}$, na který jsme schopni použít postupy z předešlého oddílu. Přehledně si sepišme výsledek pro funkce f a u_0 dostatečně hezké.

Tvrzení 4.3.4 (O řešení rovnice vedení tepla na polopřímce)**.** *Nechť* $f : [0, T] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ *a* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in C([0, T] \times [0, \infty))$ *a* $u_0 \in C([0, \infty)) \cap L^\infty(0, \infty)$.

(i) *Jestliže je možné funkci u_0 liše rozšířit na funkci $\widetilde{u}_0 \in C(\mathbb{R})$ a je možné funkci f rozšířit na funkci $\widetilde{f}$ takovou, že $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2} \in C([0,T] \times [0,\infty))$, $\widetilde{f}$ je lichá v prostorové proměnné a $\widetilde{f}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2}$ jsou omezené na $(0,T) \times \mathbb{R}$, pak funkce zadaná vzorcem*

$$\begin{aligned} u(t,x) := {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ & + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \widetilde{f}(s,y) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

je řešením Dirichletovy úlohy (4.3.3) *takovým, že* $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C((0,T] \times [0,\infty))$.
(ii) *Jestliže je možné funkci u_0 sudě rozšířit na funkci $\widetilde{u}_0 \in C(\mathbb{R})$ a je možné funkci f rozšířit na funkci $\widetilde{f}$ takovou, že $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2} \in C([0,T] \times [0,\infty))$, $\widetilde{f}$ je sudá v prostorové proměnné a $\widetilde{f}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2}$ jsou omezené na $(0,T) \times \mathbb{R}$, pak funkce zadaná vzorcem*

$$\begin{aligned} u(t,x) := {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ & + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \widetilde{f}(s,y) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

je řešením Neumannovy úlohy (4.3.4) *takovým, že* $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C((0,T] \times [0,\infty))$.

Důkaz. Vzhledem k Větě o řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou (Věta 4.1.4) a Větě o řešení rovnice vedení tepla s netriviální pravou stranou (Věta 4.1.7) nám stačí pouze ověřit, že po uvedených rozšířeních získáme řešení, jehož chování v bodech tvaru $(t,0)$ zaručí splnění okrajové podmínky.

Začněme Dirichletovou úlohou. Zde máme

$$\begin{aligned} u(t,0) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y + \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4(t-s)}} \widetilde{f}(s,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}s \\ &= 0, \end{aligned}$$

neboť při integraci podle y v obou integrálech integrujeme lichou funkci.

U Neumannovy úlohy použijeme Větu o derivaci integrálu podle parametru (oprávněnost jejího užití jsme již zdůvodnili pro úlohu na $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$) a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_0(y) \frac{2(y-x)}{4t} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ & + \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \frac{2(y-x)}{4(t-s)} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \widetilde{f}(s,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_0(y)\frac{2y}{4t}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \\ &\qquad + \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\frac{2y}{4(t-s)}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4(t-s)}}\widetilde{f}(s,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= 0,\end{aligned}$$

kde jsme opět využili lichost integrandů vůči prostorové proměnné. □

Poznámka 4.3.5. Povšimněme si, že pokud bychom pracovali na intervalu (a,∞), $a \in \mathbb{R}$, s nulovou Dirichletovou okrajovou podmínkou zadanou v bodě a, funkce u_0 a f by nám stačilo rozšířit liše vůči bodu a. Podobně pro nulovou Neumannovu podmínku a sudé rozšíření funkcí u_0 a f vůči a.

Někdy si k získání požadovaného typu rovnice musíme trochu dopomoci.

Příklad 4.3.6. Řešme úlohu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)\\ u(0,x) &= 0 && \text{na } (0,\infty)\\ u(t,0) &= 1 && \text{na } (0,\infty)\end{aligned}$$

a spočítejme $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)$ (myslíme pravostrannou parciální derivaci).

Dirichletova podmínka zde sice nemá požadovaný tvar, ale ten získáme přechodem k funkci $v = 1-u$. Pro novou funkci pak máme úlohu (využíváme $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)\\ v(0,x) &= 1 && \text{na } (0,\infty)\\ v(t,0) &= 0 && \text{na } (0,\infty)\end{aligned}$$

a tu ihned liše prodloužíme na

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,\infty)\times\mathbb{R}\\ v(0,x) &= \operatorname{sign} x && \text{na } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Protože funkce sign není spojitá v počátku, neexistuje klasické řešení naší úlohy. Díky Větě o řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou (Věta 4.1.4) však alespoň vidíme, že funkce

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} y \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y$$

je řešení úlohy pro funkci v ve smyslu distribucí, které má všechny vlastnosti klasického řešení pouze s tou výjimkou, že vlastnost $v \in C_0^0([0,\infty)\times\mathbb{R})$ je zeslabena na $v \in C_0^0([0,\infty)\times\mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$.

Vzorec pro v ještě zjednodušíme provedením substitucí $z = x - y$ a pak $\varrho = \frac{z}{2\sqrt{t}}$. Máme (při úpravách se už zabývejme jen případem $x > 0$, který nás zajímá vzhledem k původní úloze)

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x-z)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4t}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x-2\sqrt{t}\varrho)\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho - \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\Big) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho.
\end{aligned}
$$

Odtud

$$
u(t,x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho \qquad \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)
$$

a ($t \in (0,\infty)$)

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\Big)\Big|_{x=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{2\sqrt{t}})^2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.
$$

Funkce u je řešením ve smyslu distribucí, jemuž do klasického řešení chybí pouze spojitost v počátku.

Poznámka 4.3.7. V obecném případě nehomogenních okrajových podmínek lze úlohu převést na úlohu s homogenními okrajovými podmínkami, obecně ale můžeme získat i v případě nulové pravé strany nenulovou funkci. Například pro Dirichletovu úlohu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= 0 && \text{na } (0,\infty)\times(0,1) \\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } (0,1) \\
u(t,0) &= g(t) && \text{na } (0,\infty) \\
u(t,1) &= h(t) && \text{na } (0,\infty)
\end{aligned}
$$

po přechodu k

$$
v(t,x) = u(t,x) - g(t) - \frac{x}{a}\big(h(t)-g(t)\big)
$$

dospějeme k úloze

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} &= -g'(t) - \frac{x}{a}\big(h'(t) - g'(t)\big) \qquad \text{na } (0,\infty)\times(0,1) \\
v(0,x) &= u_0(x) - g(0) - \frac{x}{a}\big(h(0) - g(0)\big) \qquad \text{na } (0,1) \\
v(t,0) &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty) \\
v(t,1) &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty).
\end{aligned}
$$

Tutu úlohu můžeme řešit a nakonec dopočteme funkci u. Analogicky lze postupovat i pro další okrajové podmínky.

Kapitola 5

Vlnová rovnice

Budeme se zabývat rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \Delta u = f$$

(je-li $f = 0$, mluvíme o homogenní rovnici), kterou budeme studovat na množině $(0, T) \times \Omega$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Podobně jako u rovnice vedení tepla, pokud je $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, musíme na množině $(0, T) \times \partial\Omega$ zadat okrajové podmínky, tomu se ale budeme věnovat později.

Z analogie pro ODR 2. řádu plyne, že musíme zadat dvě počáteční podmínky, totiž $u(0, x)$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$. Rovnice se pro $N = 1$ se nazývá rovnicí struny a popisuje pohyb vibrující struny, pro $N = 2$ jde o model vibrující membrány, pro $N = 3$ pak o model vibrující pevné látky, případně popisuje šíření vln v prostředí. Než se pustíme do studia počáteční (tedy Cauchyovy) úlohy, ukažme si alespoň velmi zjednodušené odvození této rovnice.

Předpokládejme, že $\mathbf{u}(t, x)$ označuje posunutí daného bodu kontinua, které je obsaženo v oblasti Ω. Nechť U je libovolná dostatečně hladká podmnožina Ω. Potom použitím třetího Newtonova zákona platí

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_U \varrho \mathbf{u} \,\mathrm{d}x = \mathbf{F},$$

kde ϱ označuje hustotu látky a $\mathbf{F}$ působící sílu. Levou stranu upravíme za předpokladu dostatečné hladkosti všech vystupujících funkcí na

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_U \varrho \mathbf{u} \,\mathrm{d}x = \int_U \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varrho \mathbf{u}) \,\mathrm{d}x.$$

Pokud jde o působící síly, ty se dělí na objemové a plošné, tedy

$$\mathbf{F} = \int_U \varrho \mathbf{f} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} \mathbb{T}\mathbf{n} \,\mathrm{d}S.$$

Předpokládáme-li, že $\mathbb{T} = \mathbb{G}(\nabla \mathbf{u})$, pak máme

$$\int_{\partial U} \mathbb{T}\mathbf{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\partial U} \mathbb{G}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} \,\mathrm{d}S = \int_U \operatorname{div}(\mathbb{G}(\nabla \mathbf{u})) \,\mathrm{d}x.$$

Analogicky jako pro případ rovnice vedení tepla odsud plyne za předpokladu dostatečné hladkosti všech vystupujících funkcí

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varrho\mathbf{u}) = \varrho\mathbf{f} + \operatorname{div}(\mathbb{G}(\nabla\mathbf{u})).$$

Budeme-li předpokládat, že posunutí uvažujeme pouze v jednom směru, hustota je konstantní a tenzorová funkce $\mathbb{G} = a\mathbb{I}$, kde a je též konstantní, máme rovnici

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\Delta u = \varrho f.$$

Protože $a > 0$, můžeme psát pro $c^2 = \frac{a}{\varrho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = f.$$

5.1 Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici

Uvažujeme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u &= f && \text{na } (0,T]\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= g(x) && \text{na } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= h(x) && \text{na } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

kde $u \in C^2_2((0,T]\times\mathbb{R}^N) \cap C^0_1([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ a funkce f, g a h jsou dané spojité funkce. Časový interval je buď konečný nebo nekonečný. Ve druhém případě pak místo $(0,T]$ uvažujeme $(0,\infty)$ a také některé důkazy níže je třeba mírně upravit, to ale nebudeme dělat. Tvar řešení si odvodíme pro $N = 1, 2, 3$. Ostatní případy lze nalézt například v monografii [Ev PDE], my se tomu na tomto kurzu věnovat nebudeme.

Odvození tvaru řešení budeme nejprve provádět v jednotlivých dimenzích pro $f = 0$, případ nenulové pravé strany si pak vyřešíme pro všechny tři případy společně pomocí Duhamelova principu. Nejprve si ukážeme tvar řešení pro $N = 1$, poté se budeme věnovat případu $N = 3$ a nakonec se podíváme na $N = 2$.

Nechť tedy $f = 0$ v (5.1.1) a $N = 1$. Všimněme si, že pokud $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$, pak lze psát

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\Big)u.$$

Označme $v(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x)$. Potom

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Vidíme tedy, že v řeší transportní rovnici. Pokud označíme $v(0,x) = a(x)$, máme díky výsledkům v Sekci 2.3

$$v(t,x) = a(x-ct), \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Dále máme
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = v(t,x) = a(x-ct).$$
Opět díky výsledkům Sekce 2.3 věnované transportní rovnici (tentokrát ale jde o rovnici nehomogenní) máme

$$u(t,x) = \int_0^t a(x + c(t-s) - cs)\,\mathrm{d}s + b(x+ct) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} a(y)\,\mathrm{d}y + b(x+ct),$$

kde funkce b je počáteční podmínkou pro funkci u. Dosazením máme $b(z) = g(z)$ a $a(z) = h(z) - cg'(z)$, proto

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \big(h(y) - cg'(y)\big)\,\mathrm{d}y + g(x+ct),$$

tedy

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\big(g(x+ct) + g(x-ct)\big), \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{5.1.2}$$

Z předchozích výpočtů plyne

Věta 5.1.1 (Řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici pro $N = 1$)**.** *Nechť $h \in C^1(\mathbb{R})$ a $g \in C^2(\mathbb{R})$. Potom funkce u daná vztahem* (5.1.2) *splňuje*

(i) $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0$ *na* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

(iii)
$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = g(x_0)$$
$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = h(x_0)$$

pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz plyne přímým výpočtem a je ponechán čtenáři jako užitečné cvičení. □

Poznámka 5.1.2. (i) Vztah (5.1.2) říká, že řešení homogenní vlnové rovnice v jedné prostorové dimenzi má tvar

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

pro vhodné funkce F a G. Jde vlastně o dvě vlny, které se šíří nalevo a napravo.

(ii) Je-li $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ a $g \in C^k(\mathbb{R})$, $k \geq 2$, pak $u \in C^k([0,\infty) \times \mathbb{R})$, ale obecně není hladší. To je jeden z důležitých rozdílů vůči rovnici vedení tepla.

(iii) Všimněme si též, že pro znalost řešení na omezené množině stačí znát počáteční data jen na jistém omezeném intervalu. To je opět zásadní rozdíl vůči rovnici vedení tepla. K této problematice se ještě vrátíme na konci této kapitoly.

V dalším se budeme věnovat případu $N = 3$. K tomu ale budeme potřebovat dva pomocné výsledky.

První výsledek je analogií situace pro rovnici vedení tepla. Tento výsledek je podstatný i pro řešení okrajových úloh pro vlnovou rovnici. Uvažujme úlohu na polopřímce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f \qquad \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)\\
u(0,x) &= g(x) \qquad \text{na } (0,\infty)\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= h(x) \qquad \text{na } (0,\infty)\\
u(t,0) &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty),
\end{aligned}$$

přičemž g a h jsou spojité a spojitě diferencovatelné (a funkce g dvakrát) na $[0,\infty)$, přičemž $g(0) = g''(0) = h(0) = 0$. Prodlužme g a h liše na celé $\mathbb{R}$. Potom je toto prodloužení $\widetilde{g}$ a $\widetilde{h}$ takové, že $\widetilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ a $\widetilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$. Uvažujme řešení Cauchyovy úlohy s daty $\widetilde{g}$ a $\widetilde{h}$. Potom má tvar

$$\widetilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(x+ct) + \widetilde{g}(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{h}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{5.1.3}$$

Zřejmě $\widetilde{u}$ řeší úlohu (5.1.1) s nulovou pravou stranu a daty $\widetilde{g}$ a $\widetilde{h}$. Navíc platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\widetilde{u}(t,x) &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(x+ct) + \widetilde{g}(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{h}(y)\,\mathrm{d}y\right]\\
&= \frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(ct) + \widetilde{g}(ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}\widetilde{h}(y)\,\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

Zřejmě též

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(t,-x) &= \frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(-x+ct) + \widetilde{g}(-x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-x-ct}^{.x+ct}\widetilde{h}(y)\,\mathrm{d}y\\
&= -\frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(x-ct) + \widetilde{g}(x+ct)\big) - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{h}(y)\,\mathrm{d}y = -u(t,x).
\end{aligned}$$

Toto řešení lze přepsat na

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(g(x+ct) + g(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y & x \ge ct > 0\\ \frac{1}{2}\big(g(x+ct) - g(-x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y & ct \ge x \ge 0. \end{cases}$$

Cvičení 5.1.3. Ukažte, že pokud požadujeme $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$, stačí prodloužit g a h sudě kolem nuly (potřebujeme, aby $g'(0) = h'(0) = 0$), s takto prodlouženými daty vyřešíme Cauchyovu úlohu a po zúžení na $[0,\infty)\times[0,\infty)$ dostaneme řešení Neumannovy úlohy s homogenní okrajovou podmínkou.

Podívejme se nyní na druhý pomocný výsledek. Ten budeme formulovat pro obecné $N \geq 1$. Předpokládejme, že u řeší $(5.1.1)_{f=0}$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= g(x) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= h(x) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

a označme

$$\begin{aligned} U(x;t,r) &= \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,\mathrm{d}S(y) := \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,\mathrm{d}S(y) \\ G(x;r) &= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) \\ H(x;r) &= \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\,\mathrm{d}S(y). \end{aligned}$$

Lemma 5.1.4. *Nechť $x \in \mathbb{R}^N$ a u řeší (5.1.4). Nechť $u \in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$, $m \geq 2$. Potom $U \in C^m([0,\infty)\times[0,\infty))$ a U řeší počáteční úlohu pro Euler–Darboux–Poissonovu rovnici*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - c^2 \frac{N-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \qquad \textit{na } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ U(x;0,r) &= G(x;r) \qquad \textit{na } (0,\infty) \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x;0,r) &= H(x;r) \qquad \textit{na } (0,\infty). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Důkaz. Všimněme si, že

$$U(x;t,r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B_1(0)} u(t,x+rz)\,\mathrm{d}S(z).$$

Potom

$$\frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r) = \fint_{\partial B_1(0)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x+rz) z_i\,\mathrm{d}S(z). \tag{5.1.6}$$

Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r) &= \fint_{\partial B_r(x)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_i}(t,y)\frac{y_i - x_i}{r}\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t,y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\,\mathrm{d}y = \frac{r}{N}\fint_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti použili, že $|B_r(x)| = \frac{r}{N}|\partial B_r(x)|$. Analogicky lze počítat i vyšší derivace a ze vztahu (5.1.6) je vidět, že $\frac{\partial^m U}{\partial r^m}$ je spojitá funkce. Tedy $U \in C^m([0,\infty)\times$

$[0, \infty)$). Nyní využijeme odvozený vztah a počítejme

$$\frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r) = \frac{r}{c^2 N}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r^{N-1}c^2 N}\frac{1}{|B_1(0)|}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,\mathrm{d}y.$$

Odsud

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^{N-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x;t,r)\Big) &= \frac{1}{Nc^2|B_1(0)|}\frac{\partial}{\partial r}\int_{B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{Nc^2|B_1(0)|}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,\mathrm{d}S(y)\\ &= \frac{r^{N-1}}{c^2}⨍_{\partial B_r(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y)\,\mathrm{d}S(y)\\ &= \frac{r^{N-1}}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x;t,r).\end{aligned}$$

Ve druhé rovnosti jsme využili vztah

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}S(y),$$

který se získá přechodem do zobecněných sférických souřadnic v prvním integrálu. Provedením derivace součinu nalevo a jednoduchou úpravou výsledné rovnice dostaneme dokazované tvrzení. □

Nyní jsme připraveni nalézt tvar řešení pro $N = 3$. Nechť u řeší (5.1.4) pro $N = 3$. Použijeme definice U, F a G a položíme

$$\widetilde{U} = rU, \qquad \widetilde{G} = rG \qquad \widetilde{H} = rH.$$

Ověříme, že $\tilde{U}$ řeší

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial r^2} &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)\\ \widetilde{U}(x;0,r) &= \widetilde{G}(x;r) \qquad \text{na } (0,\infty)\\ \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}(x;0,r) &= \widetilde{H}(x;r) \qquad \text{na } (0,\infty).\end{aligned}$$

Zřejmě je též

$$\widetilde{U}(x;t,0) = 0 \qquad \text{na } (0,\infty).$$

Platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial t^2} &= r\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 r\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\Big)\\ &= c^2\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial U}{\partial r} + U\Big) = c^2\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

Použijeme vztah pro řešení na polopřímce (připomeňme, že r se přirozeně prodlužuje liše a tedy U prodlužujeme sudě) a použijeme, vzhledem k tomu, že chceme dělat limitu pro $r \to 0_+$, vztah pro $0 \le r \le ct$

$$\widetilde{U}(x;t,r) = \frac{1}{2}\big(\widetilde{G}(r+ct) - \widetilde{G}(-r+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-r+ct}^{r+ct} \widetilde{H}(y)\,\mathrm{d}y \qquad ct \ge r \ge 0.$$

Protože $u(t,x) = \lim_{r\to 0_+} \frac{\widetilde{U}(x;t,r)}{r}$, dostáváme

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0_+}\left(\frac{\widetilde{G}(r+ct) - \widetilde{G}(ct-r)}{2r} + \frac{1}{2cr}\int_{-r+ct}^{r+ct}\widetilde{H}(y)\,\mathrm{d}y\right) = \widetilde{G}'(ct) + \frac{1}{c}\widetilde{H}(ct).$$

Odsud plyne

$$u(t,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[z \fint_{\partial B_z(x)} g(y)\,\mathrm{d}S(y)\Big]\Big|_{z=ct} + \frac{ct}{c4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

První člen lze upravit pomocí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[z \fint_{\partial B_z(x)} g(y)\,\mathrm{d}S(y)\Big]\Big|_{z=ct} &= \fint_{\partial B_{ct}(x)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + ct \fint_{\partial B_1(0)} \nabla g(x+wct)\cdot w\,\mathrm{d}S(w)\\ &= \fint_{\partial B_{ct}(x)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + \fint_{\partial B_{ct}(x)} \nabla g\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y).\end{aligned}$$

Řešení naší úlohy (5.1.4) má tedy pro $N = 3$ tvar

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) + \frac{1}{4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(x)} \big[g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\big]\,\mathrm{d}S(y).$$

Případ $N = 2$ je potřeba dělat jinak, předchozí postup nefunguje. Budeme ho chápat jako speciální případ situace $N = 3$, kdy žádná z vystupujících funkcí nezávisí na x_3.

Je-li $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ taková, že řeší $(5.1.1)_{f=0}$, po označení $\overline{u}(t,x_1,x_2,x_3) = u(t,x_1,x_2)$, $\overline{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$, $\overline{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$ funkce $\overline{u}$ řeší

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2} - c^2\Delta_{\mathbb{R}^3}\overline{u} &= 0 \qquad \text{na } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\\ \overline{u}(0,x) &= \overline{g}(x) \text{ na } \mathbb{R}^3\\ \frac{\partial\overline{u}}{\partial t}(0,x) &= \overline{h}(x) \text{ na } \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Označme ještě $\overline{x} = (x_1,x_2,0)\in\mathbb{R}^3$, $x = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Potom

$$\begin{aligned}u(t,x) = \overline{u}(t,\overline{x}) = \frac{t}{4\pi(ct)^2}&\int_{\partial B_{ct}(\overline{x})} \overline{h}(y)\,\mathrm{d}S(y)\\ &+ \frac{1}{4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(\overline{x})} \big[\overline{g}(y) + \nabla\overline{g}(y)\cdot(y-x)\big]\,\mathrm{d}S(y),\end{aligned}$$

kde

$$B_{ct}(\overline{x}) = \{z \in \mathbb{R}^3 : |z - \overline{x}| < ct\}.$$

Využili jsme též toho, že $\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_3} = 0$. Všimněme si, že

$$\int_{\partial B_{ct}(\overline{x})} \overline{h}(y)\,\mathrm{d}S(y) = 2\int_{B_{ct}(x)} h(y)\big(1 + |\nabla\gamma(y)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y,$$

kde $\gamma(y) = (c^2t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}$ pro $y \in B_{ct}(x)$. Faktor 2 je způsobený tím, že integrujeme přes dvě hemisféry, přičemž oba integrály jsou díky nezávislosti integrované funkce na proměnné x_3 totožné. Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned}\big(1 + |\nabla\gamma(y)|^2\big)^{\frac{1}{2}} &= \Big(1 + \frac{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}{c^2t^2 - |y-x|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{c^2t^2}{c^2t^2 - |y-x|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{ct^2}{2\pi(ct)^2}\int_{B_{ct}(x)} \frac{h(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi ct}\int_{B_{ct}(x)} \frac{g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{c}{2}\fint_{B_{ct}(x)} \frac{t^2h(y) + t(g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x))}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^2, t > 0.\end{aligned}$$

Věta 5.1.5 (Řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici pro $N = 2, 3$)**.** *a) Nechť $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ a $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Potom funkce u daná vztahem*

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) + \frac{1}{4\pi(ct)^2}\int_{\partial B_{ct}(x)} \big[g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\big]\,\mathrm{d}S(y) \tag{5.1.7}$$

řeší úlohu $(5.1.1)_{f=0}$ *pro* $N = 3$*, tedy*

(i) $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0$ *na* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$

(iii)

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = g(x_0)$$

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = h(x_0)$$

pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

b) Nechť $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Potom funkce u daná vztahem

$$u(t,x) = \frac{c}{2} \fint_{B_{ct}(x)} \frac{t^2 h(y) + t(g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x))}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \,\mathrm{d}y \tag{5.1.8}$$

řeší úlohu $(5.1.1)_{f=0}$ *pro $N = 2$, tedy*

(i) $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ *na* $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$

(iii)

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = g(x_0)$$

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = h(x_0)$$

pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Dalším cílem je řešit úlohu pro nenulovou pravou stranu. Opět budeme uvažovat pouze dimenze $N = 1,2,3$, i když začátek je univerzální pro libovolnou dimenzi. Budeme se inspirovat postupem pro rovnici vedení tepla, půjde tedy opět o Duhamelův princip modifikovaný pro rovnici druhého řádu v čase.

Uvažujme tedy funkci $v(t,x;s)$ řešící

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(t,x;s)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v(t,x;s)}{\partial x^2} &= 0 \qquad \text{na } (s,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ v(s,x;s) &= 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial v(t,x;s)}{\partial t}\Big|_{t=s} &= f(t,x) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

a poté položme

$$u(t,x) := \int_0^t v(t,x;s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0. \tag{5.1.9}$$

Duhamelův princip pak říká, že tato funkce řeší úlohu $(5.1.1)_{g=h=0}$.

Věta 5.1.6 (Řešení vlnové rovnice s pravou stranou)**.** *Nechť $N = 1,2,3$, pravá strana $f \in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$. Nechť u je definováno vztahem* (5.1.9)*, kde $v(t,x;s)$ lze získat z formulí* (5.1.2)*,* (5.1.7) *a* (5.1.8)*. Potom*

(i) $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f$ *na* $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$

(iii)

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = 0$$

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\ t>0}} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 0$$

pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Důkaz. Připomeňme, že pro $N = 1$ potřebujeme pro existenci klasického řešení vlnové rovnice s nulovou pravou stranou $h \in C^1(\mathbb{R})$ a pro $N = 2$ a 3 pak $h \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Proto za daných předpokladů je funkce $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$. Počítejme nyní

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = v(t,x;t) + \int_0^t \frac{\partial v(t,x;s)}{\partial t}\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\partial v(t,x;s)}{\partial t}\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial v(t,x;t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 v(t,x;s)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}s = f(t,x) + \int_0^t \frac{\partial^2 v(t,x;s)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}s$$

$$c^2 \Delta u(t,x) = \int_0^t c^2 \Delta v(t,x;s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\partial^2 v(t,x;s)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}s.$$

Proto

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{na } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N.$$

Zjevně též $u(0,x) = \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0$. □

Ukažme si nyní, k jakým výsledným formulím vede vztah (5.1.9) v jednotlivých dimenzích.
(i) Je-li $N = 1$, máme

$$v(t,x;s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,y)\,\mathrm{d}y.$$

Proto

$$u(t,x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c\tau}^{x+c\tau} f(t-\tau,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\tau, \tag{5.1.10}$$

kde jsme v poslední rovnosti použili záměnu proměnných $t - s = \tau$.
(ii) Je-li $N = 2$, pak

$$v(t,x;s) = \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{c(t-s)}(x)} \frac{f(s,y)}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - |y-x|^2}}\,\mathrm{d}y,$$

proto

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \left(\int_{B_{c(t-s)}(x)} \frac{f(s,y)}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - |y-x|^2}}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s. \tag{5.1.11}$$

(ii) Je-li $N = 3$, pak

$$v(t,x;s) = \frac{1}{4\pi c^2 (t-s)} \int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s,y)\,\mathrm{d}S(y),$$

proto

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} \Big(\int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s,y)\,\mathrm{d}S(y) \Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \Big(\int_{\partial B_{cr}(x)} \frac{f(t-r,y)}{r}\,\mathrm{d}S(y) \Big)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \Big(\int_{\partial B_{\tau}(x)} \frac{f\big(t-\frac{\tau}{c},y\big)}{\tau}\,\mathrm{d}S(y) \Big)\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili záměnu proměnných $r = t - s$ a ve třetí $\tau = rc$. Proto máme

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{f\big(t - \frac{|y-x|}{c}, y\big)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y. \tag{5.1.12}$$

Všimněme si, že všechny tři formule závisí na datech pouze z omezené množiny, přičemž velikost této množiny roste nade všechny meze pokud jde čas do nekonečna. K tomuto pozorování se za chvíli vrátíme.

5.2 Okrajové úlohy pro vlnovou rovnici

Podívejme se na klasickou formulaci alespoň dvou okrajových úloh pro vlnovou rovnici. Mějme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezenou oblast s dostatečně hladkou hranicí ($C^{0,1}$ stačí pro Dirichletovu úlohu, C^1 je potřeba pro úlohu Neumannovu). Uvažujeme dvě úlohy
a) Dirichletova úloha

$$u \in C^2((0,T)\times\Omega) \cap C([0,T]\times\overline{\Omega}),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T]\times\Omega)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(t,x) &= f(t,x) \qquad \text{na } (0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= g(x) \qquad \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} &= h(x) \qquad \text{na } \Omega \\ u(t,x) &= w(t,x) \qquad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Dle naší interpretace tedy předepisujeme posunutí na hranici oblasti Ω. Pro případ $N = 1$ předepisujeme polohu struny na koncích.

b) Neumannova úloha

$$
\begin{aligned}
u \in C^2((0,T] \times \Omega) \cap C^1([0,T] \times \overline{\Omega})& \\
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(t,x) = f(t,x) &\qquad \text{na } (0,T] \times \Omega \\
u(0,x) = g(x) &\qquad \text{na } \Omega \\
\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = h(x) &\qquad \text{na } \Omega \\
\frac{\partial u(t,x)}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u \cdot \mathbf{n})(t,x) = w(t,x) &\qquad \text{na } (0,T] \times \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

De naší interpretace předepisujeme působící síly na hranici oblasti Ω. Speciálně pro $w = 0$ se jedná o situaci, kdy necháme hranici volnou. Pro případ $N = 1$ a $w = 0$ jde o strunu, která není upevněna na koncích a pohybuje se zde volně.

Věta 5.2.1 (O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro vlnovou rovnici). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy $C^{0,1}$ pro Dirichletovu úlohu a třídy C^1 pro úlohu Neumannovu. Pak pro obě z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících*

$$u \in C^2([0,T] \times \Omega). \tag{5.2.3}$$

Důkaz. Předpokládejme, že máme dvě klasická řešení u_1, u_2 uvedených vlastností. Položme $u := u_1 - u_2$. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 &\qquad \text{na } [0,T] \times \Omega \\
u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 &\qquad \text{na } \Omega,
\end{aligned}
$$

a

$$u \equiv 0 \qquad \text{na } (0,T] \times \partial\Omega \qquad \text{(pro Dirichletovu podmínku)},$$

respektive

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0 \qquad \text{na } (0,T] \times \partial\Omega \qquad \text{(pro Neumannovu podmínku)}.$$

Zafixujme $T_0 \in (0,T)$. Pro každé $t \in (0,T_0)$ vynásobme diferenciální rovnici funkcí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a integrujme přes Ω (rozdělení integrálů můžeme provést díky (5.2.3) a Hölderově nerovnosti)

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \right) \frac{\partial u}{\partial t} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \,\mathrm{d}x - c^2 \int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} \,\mathrm{d}x.$$

Nyní si upravíme integrály na pravé straně. Jednak díky Větě o derivaci integrálu podle parametru (integrovatelnou majorantu pro integrál nalevo umíme zřejmě zkonstruovat) máme

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Na druhý integrál jsme oprávněni použít identitu (ii) z Věty o Greenových identitách (Věta 1.3.5), kde v případě Dirichletovy i Neumannovy podmínky plošný integrál vymizí. Dostáváme

$$\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.$$

Celkově proto máme

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Teď už stačí jen integrovat získanou rovnost přes $(0, T_0)$ a dostáváme (využíváme také $u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$)

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}(T_0, x)\Big)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}c^2\int_\Omega |\nabla u(T_0, x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Odtud díky nezápornosti druhého integrálu, spojitosti funkce $\frac{\partial u}{\partial t}$ a tomu, že $T_0 \in (0, T)$ bylo libovolné, máme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0 \qquad \text{na } (0, T] \times \Omega.$$

Použijeme-li ještě $u(0, x) = 0$ na Ω a $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega})$, dostáváme konečně

$$u \equiv 0 \qquad \text{na } [0, T] \times \overline{\Omega}.$$

□

Z tvaru řešení Cauchyovy úlohy plyne, že řešení této úlohy závisí na datech úlohy ležící pouze v jistém kuželu. Dokažme analogický výsledek i pro řešení vlnové rovnice na libovolné množině. Označme pro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ a $t_0 > 0$

$$C = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < t < t_0, |x - x_0| < c(t_0 - t)\}.$$

Dále označme pro $0 \le t < t_0$

$$B_{c(t_0 - t)}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < c(t_0 - t)\}.$$

Pro libovolné řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{v kuželu } C \tag{5.2.4}$$

a libovolné $0 \le t \le t_0$ definujme „energii“

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{B_{c(t_0 - t)}(x_0)} \Big(\Big|\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|^2 + |\nabla u(t, x)|^2\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Máme následující výsledek

Věta 5.2.2 (Konečná rychlost šíření signálu pro vlnovou rovnici)**.** *Nechť $u \in C^2(\overline{C})$ je klasické řešení rovnice* (5.2.4) *na kuželu C. Je-li $u \equiv 0$ a $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ na $B_{ct_0}(x_0)$, potom $u \equiv 0$ na C a díky spojitosti též na $\overline{C}$.*

Důkaz. Než se pustíme do důkazu tvrzení naší věty, všimněme si, že pro funkci $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dostatečně hladkou platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} F\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_0^{c(t_0-t)}\int_{\partial B_r(x_0)} F(t,x)\,\mathrm{d}S\Big)\,\mathrm{d}r\\ &= \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x - c\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)} F(t,x)\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Použitím tohoto vztahu máme

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + c^2\frac{\partial \nabla u}{\partial t}\cdot\nabla u\Big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}c\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + c^2|\nabla u|^2\Big)\,\mathrm{d}S.$$

Použitím Greenovy identity (ii) z Věty 1.3.5, tj. integrace „per partes“ ve více dimenzích, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} &\frac{\partial u}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u\Big)\,\mathrm{d}x + c^2\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S\\ &- \frac{1}{2}c\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + c^2|\nabla u|^2\Big)\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Pokud v prvním integrálu napravo použijeme, že u řeší na C rovnici (5.2.4), a ve druhém aplikujeme Cauchy–Schwartzovu nerovnost, máme

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \le \frac{1}{2}c\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + c^2|\nabla u|^2\Big)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + c^2|\nabla u|^2\Big)\,\mathrm{d}S = 0.$$

Tedy $e(t) \le e(0) = 0$, což znamená, že $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ a $\nabla u = \mathbf{0}$ v C, tedy u je v C konstantní. Ale $u \equiv 0$ na $B_{ct_0}(x_0)$, tedy $u \equiv 0$ na C a ze spojitosti funkce u též $u \equiv 0$ na $\overline{C}$. □

Kapitola 6

Laplaceova a Poissonova rovnice

Budeme hledat řešení rovnice

$$-\Delta u = f \qquad \text{na } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N; \tag{6.0.1}$$

Je-li $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, je třeba kvůli jednoznačnosti řešení zadat ještě okrajové podmínky. Tato rovnice se nazývá Poissonova rovnice. Je-li $f = 0$, pak mluvíme o rovnici Laplaceově. Tyto rovnice popisují mimo jiné stacionární stavy řešení rovnice vedení tepla.

6.1 Fundamentální řešení Poissonovy rovnice

Nejprve budeme hledat řešení rovnice (6.0.1) na celém $\mathbb{R}^N$. Za tímto účelem se pokusíme nalézt řešení rovnice

$$\Delta\mathcal{E} = 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

které bude radiálně symetrické a singulární v počátku. Použitím radiální symetrie dostáváme pro $\mathcal{E}(x) = V(|x|)$

$$\Delta V(r) = \frac{\mathrm{d}^2 V(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = 0,$$

tedy

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 V(r)}{\mathrm{d}r^2} + (N-1)r\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = 0.$$

Jde o rovnici Eulerovu, u které můžeme hledat řešení ve tvaru r^α. Po dosazení dostáváme

$$r^\alpha\alpha(\alpha-1) + (N-1)r^\alpha\alpha = 0,$$

tedy $\alpha = 2 - N$. (Druhé řešení, tedy $\alpha = 0$, nevede na singulární řešení v počátku.) Pro $N \geq 3$ jsme tedy získali singulární řešení $V(r) = Cr^{2-N}$, pro $N = 2$ je ale $\alpha = 0$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice a druhým řešením (kromě $V(r) = C$) je

$V(r) = ¸C \ln r$. Volba konstanty u výše uvedených funkcí souvisí s tím, abychom nalezli řešení úlohy (6.0.1) pomocí konvoluce

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y. \tag{6.1.1}$$

Níže ověříme správnou volbu konstant v následující definici.

Definice 6.1.1 (Fundamentální řešení Poissonovy rovnice)**.** Funkce

$$\mathcal{E}(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & N = 2 \\ \frac{1}{(N-2)\kappa_N |x|^{N-2}}, & N \geq 3, \end{cases} \tag{6.1.2}$$

kde $\kappa_N = |\partial B_1|$ je míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^N$, se nazývá fundamentální řešení Poissonovy rovnice.

Poznámka 6.1.2. (i) Míru jednotkové sféry lze vyjádřit pomocí Γ-funkce následovně

$$|\partial B_1| = \frac{N \pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}.$$

(ii) Ve skutečnosti platí $-\Delta \mathcal{E} = \delta$ ve smyslu distribucí, kde δ je Diracova distribuce. S tímto přístupem se seznámíte později v rámci funkcionální analýzy. To ospravedlňuje volbu konstant a také říká, že (dokonce i ve smyslu distribucí) je konvoluce funkce f a fundamentálního řešení Poissonovy rovnice řešením úlohy (6.0.1) na $\mathbb{R}^N$ (pokud má konvoluce smysl).
(iii) Všimněme si, že mimo počátek platí

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x)}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{\kappa_N |x|^N}, \tag{6.1.3}$$

což lze získat přímým výpočtem. Proto

$$|\nabla \mathcal{E}(x)| \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}.$$

Analogicky pak

$$|\nabla^k \mathcal{E}(x)| \leq \frac{C(k,N)}{|x|^{N-2+k}},$$

kde $k = 1, 2, \ldots$ pro $N = 2$ a $k = 0, 1, 2 \ldots$ pro $N \geq 3$. Speciálně pak

$$\nabla^2 \mathcal{E}(x) \sim \frac{1}{|x|^N},$$

což generuje neintegrovatelnou singularitu na okolí počátku a povede k jistým problémům v následujících větách. Na druhou stranu, právě toto chování zaručuje všechny krásné výsledky, které níže dokážeme. Připomeňme též, že mimo počátek máme $\Delta \mathcal{E} = 0$.

Věta 6.1.3 (Řešení Poissonovy rovnice na $\mathbb{R}^N$). *Nechť $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ (jedenkrát spojitě diferencovatelná funkce s kompaktním nosičem). Potom funkce*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

splňuje

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$

(ii) $-\Delta u = f$ *na* $\mathbb{R}^N$.

Důkaz. Pro

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

počítejme $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Přímé použití Věty o derivaci integrálu závislého na parametru založené na Lebesgueově větě o integrovatelné majorantě není úplně jednoduché a to i přesto, že $|\nabla \mathcal{E}(x)| \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}$ je lokálně integrovatelná funkce. Na druhou stranu, použitím Vitaliho věty o limitním přechodu lze dokázat analogii Věty o derivaci integrálu závislého na parametru. Zde je podstatná podmínka, kterou je třeba ověřit, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|E| < \delta$ je $\left|\int_E \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial x_i} f(y)\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$. Je-li $f(y) < K$ a integrujeme-li, díky kompaktnímu nosiči f, pouze přes omezené množiny, máme díky odhadu na derivaci $\mathcal{E}$, že

$$\left|\int_E \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial x_i} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq C|E|^\alpha$$

pro jisté $\alpha > 0$ a Vitaliho větu lze použít. Proto dostáváme

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial x_i} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Alternativně lze větu založenou na Lebesgueově větě o majorizované konvergenci použít na tvar

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y\Big) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}y.$$

Majorantou je zde $\frac{C}{|y|^{N-2}} 1_{B_R(x)}$ pro jisté $0 < R < \infty$, ale je třeba nyní derivovat ještě jednou a to se již Vitaliho větě nevyhneme.

Nyní chceme počítat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial y_i} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zde již nelze přímo přehodit derivaci a integrál a derivovat funkci $\mathcal{E}$. Musíme postupovat následovně

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial y_i} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Zde již díky našim předpokladům na funkci f můžeme použít Větu o derivaci integrálu závislého na parametru založeném na Lebesgueově větě o majorizované konvergenci a dostáváme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial x_j}\, \mathrm{d}y,$$

integrovatelnou majorantou pro derivaci je $g(y) = \frac{C}{|y|^{N-1}} \chi_K(y)$, kde χ_K je charakteristická funkce jistého kompaktu K. Díky analogickému argumentu tedy dostáváme, že $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Zbývá dokázat, že $-\Delta u = f$ na $\mathbb{R}^N$. Chceme přehodit derivaci z funkce f na $\mathcal{E}$, což díky singularitě $\mathcal{E}$ v počátku není úplně přímočaré. Proto musíme použít následující postup.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial x_i}\, \mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}y \\ - \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Druhý integrál je vzhledem k ε stejnoměrně malý, máme totiž

$$\Big| - \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}y \Big| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{C(f,N)}{|y|^{N-1}}\, \mathrm{d}y = C(f,N) \int_0^\varepsilon \mathrm{d}r = C(f,N)\varepsilon$$

a pravá strana jde stejnoměrně k nule vzhledem k x, pokud $\varepsilon \to 0_+$. Zabývejme se proto prvním integrálem.

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(y)}{\partial y_i^2} f(x-y)\, \mathrm{d}y \\ - \int_{\partial(\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} n_i^{ext}(y) f(x-y)\, \mathrm{d}S(y).\end{aligned}$$

Tentokrát nás zajímá pouze druhý integrál (první sečtením přes $i = 1, 2, \dots, N$ vymizí). Máme

$$\begin{aligned}&-\int_{\partial(\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} n_i^{ext} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}S(y) = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} n_i^{ext}(y) f(x-y)\, \mathrm{d}S(y) \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{-y_i}{\kappa_N |y|^N} \frac{y_i}{|y|} f(x)\, \mathrm{d}S(y) + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{-y_i}{\kappa_N |y|^N} \frac{y_i}{|y|} (f(x-y) - f(x))\, \mathrm{d}S(y).\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \mathcal{E}(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y - \sum_{i=1}^N \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \mathcal{E}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y)}{\partial y_i}\, \mathrm{d}y \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\kappa_N \varepsilon^{N+1}} f(x)\, \mathrm{d}S(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\kappa_N \varepsilon^{N+1}} (f(x-y) - f(x))\, \mathrm{d}S(y) \\ &\quad = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

Nyní $I_1 = 0$ pro všechna $\varepsilon > 0$, $|I_2| \le C\varepsilon$, $I_3 = -f(x)$ a

$$|I_4| \le \frac{1}{\kappa_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \max_{z\in\mathbb{R}^N} |f'(z)||y-x| \,\mathrm{d}S(y) = K\varepsilon.$$

Pokud provedeme napravo limitu $\varepsilon \to 0_+$, dostáváme $\Delta u = -f$ na $\mathbb{R}^N$, což jsme chtěli dokázat. □

6.2 Věta o třech potenciálech

Budeme se zabývat reprezentací hladké funkce u na otevřené množině Ω pomocí tří integrálů: jednoho objemového, který obsahuje Δu, a dvou plošných; jeden obsahuje hodnotu u a druhý $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ na hranici dané množiny.

Připomeňme Greenovu identitu (iii) z Věty 1.3.5. Ta má tvar (stačí, aby $\Omega \in C^{0,1}$)

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big) \,\mathrm{d}S. \tag{6.2.1}$$

Nyní si uvedeme znění slíbeného výsledku.

Věta 6.2.1 (Věta o třech potenciálech)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s alespoň lipschitzovskou hranicí, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\mathcal{E}$ značí fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Pak pro všechna $x \in \Omega$ platí*

$$u(x) = -\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Big(\mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) \Big) \,\mathrm{d}S(y),$$

kde

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) := \nabla u(y)\cdot \mathbf{n}(y) \qquad a \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) := \nabla_y \mathcal{E}(x-y)\cdot \mathbf{n}(y)$$

a $\mathbf{n}$ *je vnější normála k $\partial\Omega$.*

Důkaz. Zvolme $x \in \Omega$. Zafixujme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby platilo $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, a zaveďme pomocnou množinu

$$V_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}.$$

Díky rovnosti (6.2.1) pak máme

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon} \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{V_\varepsilon} \Delta_y \mathcal{E}(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial V_\varepsilon} \mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) \\ - \int_{\partial V_\varepsilon} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y). \end{aligned}$$

Jednotlivé integrály si označme způsobem $I_1 = I_2 + I_3 - I_4$. Nyní v naší rovnosti provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0_+$.

Předně díky omezenosti Δu na Ω a $\mathcal{E} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ máme

$$I_1 \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} \int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dále vlastnost $\Delta_y \mathcal{E}(x-y) = 0$ pro $y \neq x$ dává pro všechna $\varepsilon > 0$

$$I_2 = 0.$$

Pro integrál I_3 platí (vnější normála k ∂V_ε je na $\partial B_\varepsilon(x)$ vnitřní normálou k $\partial B_\varepsilon(x)$)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &\overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y), \end{aligned}$$

kde jsme využili odhad (uvažujeme jen případ $N \geq 3$, pro $N = 2$ se postupuje podobně)

$$\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y)\Big| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{C}{\varepsilon^{N-2}} \max_{\overline{\Omega}} |\nabla u|\,\mathrm{d}S(y) = C\frac{\varepsilon^{N-1}}{\varepsilon^{N-2}}.$$

Pro poslední integrál máme

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &\overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) + u(x), \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) &= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\Big(-\frac{1}{\kappa_N}\frac{y-x}{|y-x|^N}\Big)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\,\mathrm{d}S(y) \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (u(y)-u(x))\frac{1}{\kappa_N}\frac{1}{|y-x|^{N-1}}\,\mathrm{d}S(y) \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(x)\frac{1}{\kappa_N}\frac{1}{|y-x|^{N-1}}\,\mathrm{d}S(y) \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} -u(x). \end{aligned}$$

Ze získaných výsledků plyne dokazovaná rovnost. □

Důsledek 6.2.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s alespoň lipschitozvskou hranicí a $u \in C^2(\overline{\Omega})$ splňuje $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a na Ω platí*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\Big)\,\mathrm{d}S(y),$$

kde $\mathbf{n}$ *je vnější normála k* $\partial\Omega$.

Důkaz. Integrální formule plyne přímo z Věty o třech potenciálech (Věta 6.1.3). Navíc pro $x \notin \partial\Omega$ a $y \in \partial\Omega$ jsou funkce $x \mapsto \mathcal{E}(x-y)$ a $x \mapsto \nabla_y \mathcal{E}(x-y) \cdot \mathbf{n}(y)$ nekonečně hladké a lokálně omezené se všemi svými derivacemi. Díky tomu vlastnost $u \in C^\infty(\Omega)$ plyne z Věty o derivaci integrálu podle parametru; rozmyslete si, že platí i pro plošný integrál. □

Definice 6.2.3 (Potenciály)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s alespoň lipschitozvskou hranicí a $\mu, \sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $\varrho : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá a omezená funkce. Pak

$$v(x) := -\int_{\partial\Omega} \mu(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme *potenciálem jednoduché vrstvy*,

$$\begin{aligned} w(x) &:= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{y-x}{\kappa_N |x-y|^N} \cdot \mathbf{n}(y)\,\mathrm{d}S(y) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

nazýváme *potenciálem dvojvrstvy* a

$$\varphi(x) := -\int_{\Omega} \varrho(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme *objemovým (Newtonovým) potenciálem*.

Poznámka 6.2.4. Terminologie pochází z elektrostatiky, kde objemový potenciál popisuje elektrostatické pole vyvolané prostorově rozloženým nábojem, potenciál jednoduché vrstvy popisuje elektrostatické pole vyvolané nábojem rozloženým na ploše a potenciál dvojvrstvy popisuje elektrostatické pole vyvolané plošně rozloženými dipóly.

Definice 6.2.5 (Harmonická funkce a harmonická funkce s kontrolovaným růstem)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \in C^2(\Omega)$. Řekneme, že funkce u je *harmonická* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω. Řekneme, že funkce u je *harmonická s kontrolovaným růstem* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω a navíc buď Ω je omezená, nebo

$$u(x) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2}}\Big) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Poznámka 6.2.6. Pro $N = 2$ růstová podmínka z definice harmoničnosti s kontrolovaným růstem znamená omezenost na nějakém okolí nekonečna. Pro $N \geq 3$ růstová podmínka zaručuje, že existuje nulová limita u pro $|x| \to \infty$. Tato limita je stejnoměrná a má předepsanou rychlost poklesu.

Následující dvě věty jsou užitečné například při konstrukci řešení Dirichletovy nebo Neumannovy úlohy pro Laplaceovu rovnici, což uvidíme alespoň pro Dirichletovu úlohu dále.

Věta 6.2.7 (O potenciálech jednoduché vrstvy a dvojvrstvy)**.** *Nechť $N \geq 3$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\mu, \sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce s kontrolovaným růstem na Ω a na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.*

Pro $N = 2$ platí tvrzení s tím rozdílem, že potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pouze harmonická funkce.

Důkaz. Nejprve si připomeňme, že $\Delta\mathcal{E} = 0$ všude mimo počátek. Proto pokud $x \notin \partial\Omega$, díky radiální symetrii funkce $\mathcal{E}$ a díky Větě o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.4) máme

$$\Delta v(x) = \Delta\Big(-\int_{\partial\Omega} \mu(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}S(y)\Big) = -\int_{\partial\Omega} \mu(y)\Delta_x\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) = 0$$

a

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= \Delta\Big(-\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(\mathcal{E}(x-y))\,\mathrm{d}S(y)\Big)\\ &= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\Delta_x\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(\mathcal{E}(x-y))\Big)\,\mathrm{d}S(y)\\ &= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(\Delta_x(\mathcal{E}(x-y)))\,\mathrm{d}S(y) = 0.\end{aligned}$$

Tím jsme získali harmoničnost na požadovaných množinách (i pro $N = 2$).

Zbývá ověřit růstovou podmínku z definice harmoničnosti s kontrolovaným růstem. Nyní již musíme případy $N = 2$ a $N \geq 3$ od sebe oddělit. Nejprve se zabývejme případem $N \geq 3$. Předpokládejme, že $|x| \geq 2\max_{y\in\partial\Omega}|y|$ (hranice množiny Ω je kompaktní množina). Pak máme

$$\begin{aligned}|v(x)| &\leq \int_{\partial\Omega} |\mu(y)||\mathcal{E}(x-y)|\,\mathrm{d}S(y) \leq \int_{\partial\Omega} |\mu(y)|\frac{C}{|x-y|^{N-2}}\,\mathrm{d}S(y)\\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\mu(y)|\frac{2^{N-2}C}{|x|^{N-2}}\,\mathrm{d}S(y) \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}|w(x)| &\leq \int_{\partial\Omega} |\sigma(y)||\nabla_y\mathcal{E}(x-y)||\boldsymbol{\nu}(y)|\,\mathrm{d}S(y) \leq \int_{\partial\Omega} |\sigma(y)|\frac{C}{|x-y|^{N-1}}\,\mathrm{d}S(y)\\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\sigma(y)|\frac{2^{N-1}C}{|x|^{N-1}}\,\mathrm{d}S(y) \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}.\end{aligned}$$

Nyní se zabývejme případem $N = 2$. Tentokrát má $\mathcal{E}$ logaritmický růst, a proto se nám nepodaří odhadnout potenciál v jako výše. Nicméně mimo počátek máme $\nabla\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{\kappa_N}\frac{x}{|x|^2}$, tedy stejným postupem jako výše získáme požadovaný odhad potenciálu w. □

Věta 6.2.8 (O objemovém potenciálu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy $C^{0,1}$. Nechť $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak je objemový potenciál $C^1(\Omega)$-funkce, která je harmonická na*

$\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 2$ a harmonická s kontrolovaným růstem na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$ (a také třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$). Je-li navíc $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, pak $\varphi \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta\varphi = \varrho \qquad \text{na } \Omega.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že pro $N \geq 3$

$$|\varphi(x)| \leq \int_\Omega |\varrho(y)||\mathcal{E}(x-y)|\,\mathrm{d}y \leq \|\varrho\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \frac{C}{|x-y|^{N-2}}\,\mathrm{d}y < \infty$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$. Díky tomu je φ dobře definované ve všech bodech. Analogický odhad se dá udělat i pro $N = 2$. Pro derivování nemůžeme použít Větu o derivaci integrálu podle parametru, protože bychom měli problém nalézt integrovatelnou majorantu. Místo toho použijeme Vitaliho větu o stejně integrovatelných funkcích, kterou můžeme stejně jako v případě důkazu Věty o derivaci integrálu podle parametru zkombinovat s Heineho větou. Funkce $\nabla\mathcal{E}$ je i přes singularitu stále integrovatelná ve vyšší mocnině než první, a proto můžeme stále ověřit stejnoměrnou malost integrálu z $|\varrho\nabla\mathcal{E}|$ přes malé množiny. Proto stejně jako v případě důkazu Věty o derivaci integrálu podle parametru můžeme ověřit, že lze zaměnit integrál a derivaci. Analogicky jako ve Větě o spojitosti integrálu podle parametru lze pak ukázat, že výsledná derivace je dokonce spojitá na Ω.

Pokud $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, pak má x kladnou vzdálenost od Ω a libovolné parciální derivace výrazu $\mathcal{E}(x-y)$ pod integrálem jsou omezené. Proto zřejmě můžeme libovolněkrát aplikovat a dostáváme jednak $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$ a navíc (připomeňme, že všude mimo počátek máme $\Delta\mathcal{E} = 0$)

$$\Delta\varphi(x) = \int_\Omega \varrho(y)\Delta_x\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Dále pro $N \geq 3$ a $|x| \geq 2\sup_{y\in\partial\Omega}|y|$ máme

$$|\varphi(x)| \leq \int_\Omega |\varrho(y)||\mathcal{E}(x-y)|\,\mathrm{d}y \leq \|\varrho\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \frac{C}{|x|^{N-2}}\,\mathrm{d}y = \frac{C}{|x|^{N-2}}.$$

Tím jsme ukázali harmoničnost s kontrolovaným růstem funkce φ na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$.

Nechť nyní platí $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$ a $x \in \Omega$. Pak můžeme psát (ověření záměny derivace a integrálu se provede stejně jako výše pomocí Vitaliho věty o stejně integrovatelných funkcích spolu s Heineho větou

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) &= -\int_\Omega \varrho(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \varrho(y)\frac{\partial}{\partial y_i}(\mathcal{E}(x-y))\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \varrho(y)\mathcal{E}(x-y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y).\end{aligned}$$

Opětovnou aplikací těchto vět dostáváme (u plošného integrálu lze použít Větu o derivaci integrálu závislého na parametru, protože $\inf_{y\in\partial\Omega}|x-y| > 0$ pro $x \in \Omega$)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x) = -\int_\Omega \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_j}(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \varrho(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_j}(x-y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Analogicky jako výše lze pak ověřit, že tato funkce je spojitá na Ω a tedy $\varphi \in C^2(\Omega)$.

Zbývá ukázat, že $\Delta\varphi = \varrho$ na Ω. Zafixujme $x \in \Omega$ a k němu $\varepsilon_0 > 0$ tak malé, že $B_{\varepsilon_0}(x) \subset \Omega$. Pak má dobrý smysl provádět následující úpravy pro $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Pišme

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = -\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\frac{\partial}{\partial y_i}(\mathcal{E}(x-y))\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}(\mathcal{E}(x-y))\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \varrho(y)\frac{\partial}{\partial y_i}(\mathcal{E}(x-y))\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\qquad\qquad + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\frac{\partial}{\partial y_i}(\mathcal{E}(x-y))\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\qquad = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x_i^2}(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \varrho(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\qquad\qquad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}S(y).
\end{aligned}$$

Z předchozích dvou formulí proto po vysčítání dostáváme

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi(x) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\sum_{i=1}^N \Big(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\varrho}{\partial y_i}(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y\Big) \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \varrho(y)\nabla\mathcal{E}(x-y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\Big(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\Delta_x\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\nabla_x\mathcal{E}(x-y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,\mathrm{d}S(y)\Big) \\
&= 0 + \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\nabla_x\mathcal{E}(x-y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,\mathrm{d}S(y).
\end{aligned}$$

Navíc na $\partial B_\varepsilon(x)$ máme

$$\nabla_x\mathcal{E}(x-y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y) = -\frac{1}{\kappa_N}\frac{x-y}{|x-y|^N}\cdot\frac{y-x}{|x-y|} = \frac{1}{\kappa_N}\frac{1}{|x-y|^{N-1}} = \frac{1}{\kappa_N}\frac{1}{\varepsilon^{N-1}}.$$

Ze spojitosti ϱ v bodě x proto dostáváme

$$\Delta\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varrho(y)\frac{1}{\kappa_N}\frac{1}{\varepsilon^{N-1}}\,\mathrm{d}S(y) = \varrho(x).$$

□

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi harmonických funkcí. Nejprve si připomeňme Greenovu identitu (i) z Věty 1.3.5. Je-li funkce u harmonická na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

s alespoň lipschitzovskou hranicí a pokud dále $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $v \in C^1(\overline{\Omega})$, pak

$$0 = \int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

Speciálně volba $v \equiv 1$ dává rovnost

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S.$$

Tuto rovnost ihned využijeme.

Věta 6.2.9 (O střední hodnotě harmonických funkcí)**.** *Nechť* $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *a* $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ *je harmonická funkce na* $B_R(x_0)$. *Pak*

$$u(x_0) = \frac{1}{\kappa_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \,\mathrm{d}S(y).$$

Důkaz. Zafixujme $r \in (0, R)$. Na množině $B_r(x_0)$ použijeme Větu o třech potenciálech (Věta 6.2.1) a dostáváme

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0 + \int_{\partial B_r(x_0)} \mathcal{E}(x_0 - y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) \\ &\qquad - \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x_0 - y) \,\mathrm{d}S(y) \\ &=: I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Integrál I_1 upravíme s využitím předpisu pro $\mathcal{E}$ (důležitá je vlastně jen radiální symetrie uvedené funkce) a rovnosti před zněním věty

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\partial B_r(x_0)} \mathcal{E}(x_0 - y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) \\ &= \begin{cases} \int_{\partial B_r(x_0)} -\frac{1}{2\pi} \log(|x_0 - y|) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) & \text{pro } N = 2 \\ \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{|x_0 - y|^{N-2}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) & \text{pro } N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log r \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) & \text{pro } N = 2 \\ \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{r^{N-2}} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \,\mathrm{d}S(y) & \text{pro } N \geq 3 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned} u(x_0) = -I_2 &= -\int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(y - x_0) \,\mathrm{d}S(y) \\ &= -\int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \Big(-\frac{1}{\kappa_N} \frac{y - x_0}{|y - x_0|^N} \Big) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} \,\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{\kappa_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \,\mathrm{d}S(y). \end{aligned}$$

Důkaz nyní dokončíme limitním přechodem $r \to R_-$, kde využijeme spojitost funkce u na $\overline{B_R(x_0)}$. □

Další zajímavou vlastností, která souvisí s vlastností střední hodnoty, je princip maxima. My si ho dokážeme v jeho silnější formě, která je podobná analogickému výsledku pro rovnici vedení tepla. Na rozdíl od rovnice vedení tepla ale máme zaručeno, že pokud funkce nabývá svého maxima někde na otevřené množině, na které úlohu řešíme, pak je funkce na celé množině konstantní. Navíc nepotřebujeme vědět nic o omezenosti oblasti Ω.

Věta 6.2.10 (O zesíleném principu maxima)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω. Jestliže u na Ω nabývá svého maxima, pak je na Ω konstantní.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $x_0 \in \Omega$ takové, že

$$u(x_0) = \max_{x \in \Omega} u(x).$$

Pak podle Věty o střední hodnotě harmonických funkcí (Věta 6.2.9; připomeňme, že harmonické funkce jsou spojité) funkce u nabývá hodnoty $u(x_0)$ na všech sférách centrovaných v x_0 a ležících v Ω, tedy na každé kouli centrované v x_0 a ležící v Ω. Pokud by tomu tak nebylo, pak by existoval na dané sféře bod y, ve kterém je $u(y) < u(x_0)$. Ostrá nerovnost by platila i na jistém okolí bodu y, což vede ke sporu s vlastností střední hodnoty.

Zvolme libovolné $x \in \Omega$ a ukažme, že platí $u(x) = u(x_0)$. Díky souvislosti Ω existuje lomená čára konečné délky ležící v Ω a spojující body x_0 a x. Protože obraz naší lomené čáry je kompaktní množina, má kladnou vzdálenost od doplňku Ω. Označme tuto vzdálenost 2δ. Lomenou čáru navíc můžeme pokrýt konečným počtem koulí

$$B_\delta(x_0), B_\delta(x_1), B_\delta(x_2), \ldots, B_\delta(x_m)$$

takových, že $x_m = x$ a $|x_j - x_{j+1}| < 2\delta$ pro všechna $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Podle první části důkazu máme $u = u(x_0)$ na $B_{2\delta}(x_0)$, speciálně

$$u(x_1) = u(x_0).$$

Nyní celý proces zopakujeme se středem x_1 a dostáváme, že $u = u(x_1) = u(x_0)$ na $B_{2\delta}(x_1)$, speciálně

$$u(x_2) = u(x_0).$$

Postupujeme indukcí, až získáme

$$u(x_m) = u(x_0).$$

□

Snadno se nahlédne, že předchozí věta má následující důsledky (aplikujte větu na u a na $-u$).

Důsledek 6.2.11. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na Ω.*
(i) *Jestliže u na Ω nabývá svého minima, pak je na Ω konstantní.*
(ii) *Jestliže u není konstantní na Ω, pak zde nenabývá ani svého minima ani maxima.*
(iii) *Jestliže navíc Ω je omezená a $u \in C(\overline{\Omega})$, pak*

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

6.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici

Ukážeme si několik případů (zejména půjde o speciální tvar množiny Ω), kdy jsme schopni nalézt řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

(za řešení považujeme funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, která splňuje rovnici ve smyslu rovnosti spojitých funkcí na Ω a hraniční podmínku ve smyslu limity pro $x \to x_0 \in \partial\Omega$, $x \in \Omega$). Tuto úlohu nazýváme Dirichletovou úlohou pro Laplaceovu rovnici.

Poznamenejme, že znalost řešení zmíněné úlohy nám umožňuje řešit obecnější úlohu (Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Skutečně, pro dostatečně rozumnou množinu Ω a funkci $f \in C^1(\overline{\Omega})$ můžeme použít Větu o objemovém potenciálu (Věta 6.2.8) a dostáváme funkci

$$v := \int_\Omega \mathcal{E}(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

která splňuje $-\Delta v = f$ na Ω. Nyní už stačí řešit úlohu

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{na } \Omega \\ w &= g - v && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

a pak položit $u := v + w$.

Řešení této úlohy je na třídě funkcí odpovídající Dirichletově úloze nanejvýš jedno, což je přímým důsledkem slabého principu maxima a minima.

Důsledek 6.3.1 (Jednoznačnost řešení vnitřní Dirichletovy úlohy)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom má Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na třídě funkcí $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Díky linearitě úlohy stačí ověřit, že úloha s nulovými daty ($f \equiv 0$, $g \equiv 0$) má pouze nulové řešení. To je ale přímým důsledkem slabého principu maxima a minima z Důsledku 6.2.11, bodu (iii). □

Přistupme nyní ke slíbeným speciálním typům úlohy (6.3.1). Začneme případem, kdy Ω je koule. Nejprve si ale představíme přístup, který nám tento problém a problémy jemu podobné pomůže řešit. Na chvíli uvažujme obecnou úlohu tvaru

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Pokud Ω a u připouštějí použití Věty o třech potenciálech (Věta 6.2.1), platí (první z integrálů uvedených ve větě vymizí díky $\Delta u \equiv 0$)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\mathcal{E}(x-y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - u(y) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y) \right) \mathrm{d}S(y).$$

Zadání úlohy nám umožňuje dosadit okrajovou podmínku za u ve druhém členu pod integrálem. V prvním členu se však vyskytuje normálová derivace, kterou neznáme. Proto se tento člen pokusíme nahradit. K tomu nám poslouží Greenova identita (ii) z Věty 1.3.5, do níž dosadíme vhodnou *korekční funkci*.

Připomeňme, že pro dvojici funkcí $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ platí vzorec (6.2.1). Pokud jsou uvedené dvě funkce navíc harmonické na Ω, má vzorec podobu

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S.$$

Předpokládejme nyní, že funkce $v\colon (y,x) \in \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ je harmonická v první N-tici proměnných na Ω a navíc platí

$$v(y,x) = \mathcal{E}(x-y) \qquad \text{pro } y \in \partial\Omega \text{ a } x \in \Omega.$$

Dosazením funkce v do dvou výše uvedených integrálních rovností a jejich odečtením dostáváme

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_y} \big(\mathcal{E}(x-y) - v(y,x) \big) \, \mathrm{d}S(y).$$

Naším cílem je proto najít funkci v takovou, že

$$\begin{aligned} \Delta_y v(y,x) &= 0 && \text{pro } y \in \Omega \text{ a } x \in \Omega \\ v(y,x) &= \mathcal{E}(x-y) && \text{pro } y \in \partial\Omega \text{ a } x \in \Omega. \end{aligned}$$

V takovém případě budeme psát řešení naší původní úlohy ve tvaru

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) G(x,y) \, \mathrm{d}S(y),$$

kde $G(x,y) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(\mathcal{E}(x-y) - v(y,x))$. Funkci G se říká *Greenova funkce*. Výhodou této formulace je, že stačí vyřešit jednu speciální okrajovou úlohu (což je v některých případech relativně jednoduché), a tím získáme řešení pro libovolnou zadanou funkci g na $\partial\Omega$.

Nyní se tyto myšlenky pokusíme použít při řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{na } B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \\ u &= g \qquad \text{na } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Konstrukci korekční funkce v založíme na myšlence vysunout singularitu funkce $(x, y) \mapsto \mathcal{E}(x - y)$ (povšimněte si, že tato funkce splňuje druhou z požadovaných podmínek na funkci v a první porušuje jen pro $y = x$) ven z kruhu $B_R(0)$ prostřednictvím *kruhové inverze*, která, jak uvidíme níže, nezkazí harmoničnost. Kruhová inverze je definována tak, že každému bodu $x \neq 0$ přiřazuje bod

$$x' := \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

Pak x a x' leží na téže polopřímce vycházející z počátku a platí $|x||x'| = R^2$. Nyní položme

$$v(y, x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \left(|y - x'| \frac{|x|}{R} \right) & \text{pro } N = 2 \\ \frac{1}{\kappa_N (N-2)} \frac{1}{|y-x'|^{N-2}} \left(\frac{R}{|x|} \right)^{N-2} & \text{pro } N \geq 3. \end{cases}$$

Porovnání se vzorci pro fundamentální řešení Poissonovy rovnice okamžitě dává, že jsme zkonstruovali funkci, která je harmonická v y-ových proměnných na množině, kde $y \neq x'$. Protože pro $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ vždy platí $x' \notin B_R(0)$, splnili jsme první podmínku pro korekční funkci (nemáme pokryt případ $x = 0$, brzy však uvidíme, že níže získaný vzorec pro Greenovu funkci je platný i přes tento nedostatek).

Nyní se budeme zabývat otázkou splnění druhé podmínky pro korekční funkci. Nejprve si povšimněme, že trojúhelníky tvořené body $0, y, x$ a $0, x', y$ jsou si podobné v tom smyslu, že oba mají stejný úhel v počátku a platí rovnost poměru délek stran

$$\frac{|x - 0|}{|y - 0|} = \frac{|x|}{R} = \frac{R}{|x'|} = \frac{|y - 0|}{|x' - 0|}.$$

Proto také platí rovnost poměru délek stran

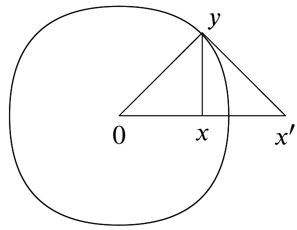
$$\frac{|x|}{|y - x|} = \frac{|y|}{|y - x'|}.$$

Odtud díky $|y| = R$ platí

$$\frac{|x|}{R} |y - x'| = |y - x|,$$

z čehož je vidět, že předpis pro $v(y, x)$ splňuje i druhou podmínku pro korekční funkci. Celkově jsme dostali vzorec

$$u(x) = - \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_y} \big(\mathcal{E}(x - y) - v(y, x) \big) \, \mathrm{d}S(y).$$



Obrázek 6.1: Podobnost trojúhelníků v důkazu Věty o Greenově funkci pro kouli (Věta 6.3.2).

Do tohoto vzorce nyní dosadíme předpisy pro $\nabla\mathcal{E}$ a ∇v, pak výsledek zjednodušíme. Díky dobře známému vzorci

$$\nabla\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{\kappa_N}\frac{x}{|x|^N} \qquad \text{pro } x \neq 0$$

dostáváme

$$\nabla\mathcal{E}(x-y)\cdot\boldsymbol{\nu}(y) = -\frac{1}{\kappa_N}\frac{y-x}{|y-x|^N}\cdot\frac{y}{R} = \frac{1}{\kappa_N}\frac{x\cdot y - R^2}{|x-y|^N R}.$$

Využijeme-li navíc značnou podobnost předpisů pro $\mathcal{E}$ a v spolu se vzorcem $\frac{|x|}{R}|y-x'| = |y-x|$, získáváme dále

$$\begin{aligned}\nabla_y v(y,x)\cdot\boldsymbol{\nu}(y) &= -\frac{1}{\kappa_N}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2}\frac{y-x'}{|y-x'|^N}\cdot\frac{y}{R} = \frac{1}{\kappa_N}\frac{|x|^2}{R^2}\frac{\frac{R^2}{|x|^2}x-y}{|x-y|^N}\cdot\frac{y}{R}\\ &= \frac{1}{\kappa_N}\frac{|x|^2}{R^2}\frac{\frac{R^2}{|x|^2}x\cdot y - R^2}{|x-y|^N R} = \frac{1}{\kappa_N}\frac{x\cdot y-|x|^2}{|x-y|^N R}.\end{aligned}$$

Proto celkově dostáváme vzorec (jeho korektnost není v obecné situaci ověřena, pracovali jsme totiž pouze s $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ a nedefinovali $u(0)$)

$$\begin{aligned}u(x) &= -\int_{\partial B_R(0)} g(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\big(\mathcal{E}(x-y)-v(y,x)\big)\,\mathrm{d}S(y)\\ &= \frac{1}{\kappa_N}\int_{\partial B_R(0)} g(y)\frac{R^2-|x|^2}{R|x-y|^N}\,\mathrm{d}S(y).\end{aligned}$$

Všimněme si, že tento vztah má smysl i pro $x = 0$; jeho platnost je důsledkem toho, že funkce u je spojitá na $B_R(0)$.

Níže si ujasníme, že jsme výše skutečně získali Greenovu funkci pro kouli.

Věta 6.3.2 (O Greenově funkci pro kouli)**.** *Nechť $R > 0$ a $g \in C(\partial B_R(0))$. Pak existuje právě jedno klasické řešení úlohy* (6.3.3) *a lze jej psát ve tvaru*

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \textit{pro } x \in B_R(0).$$

Důkaz. Položme

$$Q(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-y|^N} \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^N, x \neq y.$$

Nyní budeme studovat vlastnosti funkce Q. Předně si povšimněme, že (ve druhé rovnosti jde o body, kde $x \neq y$)

$$Q(x,y) > 0 \quad \text{kdykoliv } x \in B_R(0) \qquad \text{a} \qquad Q(x,y) = 0 \quad \text{kdykoliv } x \in \partial B_R(0).$$

Dále si vysvětlíme, že platí

$$\frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} Q(x,y) \, \mathrm{d}S(y) = 1 \qquad \text{pro všechna } x \in B_R(0).$$

Tento výsledek je okamžitě vidět pro $x = 0$. Položíme-li dále $g \equiv 1$, pak funkce $u \equiv 1$ je nekonečně hladké řešení úlohy (6.3.3). Zároveň je toto řešení jednoznačné podle Věty o jednoznačnosti řešení vnitřní Dirichletovy úlohy (Důsledek 6.3.1), a proto podle dílčích výsledků z odvození tvaru Greenovy funkce před zněním věty musí splňovat právě dokazovanou rovnost pro každé $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$.

Dále pro $x \in \mathbb{R}^N \setminus \partial B_R(0)$ a $y \in \partial B_R(0)$ spočítejme $\Delta_x Q(x,y)$ (Laplaceův operátor bereme vzhledem k x-ovým proměnným). Máme

$$
\begin{aligned}
&\Delta_x Q(x,y)\\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big(\frac{R^2-|x|^2}{R|x-y|^N}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{-2x_j|x-y|^N-(R^2-|x|^2)N|x-y|^{N-1}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}}{R|x-y|^{2N}}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{-2x_j}{R|x-y|^N}+\frac{-(R^2-|x|^2)N(x_j-y_j)}{R|x-y|^{N+2}}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^N \Big(\frac{-2|x-y|^N+2x_jN|x-y|^{N-1}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}}{R|x-y|^{2N}}+\frac{2x_jN(x_j-y_j)-(R^2-|x|^2)N}{R|x-y|^{N+2}}\\
&\qquad+\frac{(R^2-|x|^2)N(x_j-y_j)(N+2)|x-y|^{N+1}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}}{R|x-y|^{2N+4}}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^N \Big(\frac{-2}{R|x-y|^N}+\frac{2x_jN(x_j-y_j)}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{2x_jN(x_j-y_j)-(R^2-|x|^2)N}{R|x-y|^{N+2}}\\
&\qquad+\frac{(R^2-|x|^2)N(N+2)(x_j-y_j)^2}{R|x-y|^{N+4}}\Big)\\
&= \frac{-2N}{R|x-y|^N}+\frac{4N|x|^2-4Nx\cdot y}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{-(R^2-|x|^2)N^2}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{(R^2-|x|^2)N(N+2)}{R|x-y|^{N+2}}\\
&= \frac{-2N|x-y|^2}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{4N|x|^2-4Nx\cdot y}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{2N(R^2-|x|^2)}{R|x-y|^{N+2}}\\
&= \frac{-2N(|x|^2-2x\cdot y+R^2)}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{4N|x|^2-4Nx\cdot y}{R|x-y|^{N+2}}+\frac{2N(R^2-|x|^2)}{R|x-y|^{N+2}}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Odtud díky Větě o derivaci integrálu podle parametru (protože $x \notin \partial B_R(0)$, všechny parciální derivace $Q(x,y)$ jsou na dostatečně malém okolí bodu x omezené) dostáváme

$$\Delta u(x) = \frac{1}{\kappa_N}\int_{\partial B_R(0)} g(y)\Delta_x Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) = 0.$$

Zbývá vyšetřit hraniční chování. Označme $M := \max_{\partial B_R(0)}|g|$ a zvolme $x_0 \in \partial B_R(0)$ a $\varepsilon > 0$. K našemu ε najděme $\delta > 0$ tak malé, aby

$$|g(y)-g(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } y \in \partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0).$$

Pro každé $x \in B_R(0) \cap B_\delta(x_0)$ pak díky vlastnostem funkce Q máme

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \Big| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) - g(x_0) \Big| \\
&= \Big| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} (g(y) - g(x_0)) Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \Big| \\
&\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\qquad + \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

První integrál úplně napravo odhadneme velice snadno

$$I_1 \leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0)} \varepsilon Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \leq \varepsilon \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} Q(x,y)\,\mathrm{d}S(y) = \varepsilon.$$

Pro druhý integrál máme díky tomu, že pro $y \in \partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)$ je $|x - y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq \delta$,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} (|g(y)| + |g(x_0)|) \frac{(R + |x|)(R - |x|)}{R|x - y|^N}\,\mathrm{d}S(y) \\
&\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} 2M \frac{2R(R - |x|)}{R\delta^N}\,\mathrm{d}S(y) \\
&\leq 2M \frac{2R(R - |x|)R^{N-1}}{R\delta^N} = \frac{4M}{\delta^N}(R - |x|)R^{N-1}.
\end{aligned}$$

Pokud $x \in B_R(0) \cap B_\delta(x_0)$ a $|x|$ je dostatečně blízko k R, celkově dostáváme

$$|u(x) - g(x_0)| \leq 2\varepsilon.$$

Jednoznačnost řešení plyne z Věty o jednoznačnosti vnitřní Dirichletovy úlohy (Důsledek 6.3.1). □

Poznámka 6.3.3. (i) Předpokládáme-li v předchozí větě jen $g \in L^\infty(\partial B_R(0))$, dostali bychom harmonickou funkci splňující

$$\lim_{x \to x_0, x \in B_R(0)} u(x) = g(x_0)$$

pouze pro body $x_0 \in \partial B_R(0)$, v nichž je funkce g spojitá. Zároveň bychom už neměli informaci o jednoznačnosti funkce u.
(ii) Integrál ze znění věty je možné libovolně derivovat podle parametru x. Proto $u \in C^\infty(B_R(0))$. To ale již víme z Důsledku 6.2.11.

Cvičení 6.3.4. Ukažte, že řešení úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{na } B_R(x_0) \\ u &= g && \text{na } \partial B_R(x_0) \end{aligned}$$

lze psát ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(x_0)} g(y) \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R|x - y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in B_R(x_0).$$

Jen drobnými úpravami právě představeného postupu je možné získat podobný výsledek pro úlohu na doplňku koule $B_R(0)$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)} \\ u &= g && \text{na } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Věta 6.3.5 (O Greenově funkci pro doplněk koule)**.** *Nechť $R > 0$ a $g \in C(\partial B_R(0))$. Pak existuje právě jedna harmonická funkce s kontrolovaným růstem, která řeší klasicky úlohu* (6.3.4)*, a lze ji psát ve tvaru*

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{|x|^2 - R^2}{R|x - y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \textit{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Důkaz. Opět použijeme kruhovou inverzi

$$x' = \frac{R^2}{|x|^2} x \qquad \text{pro } x \neq 0,$$

která vzájemně jednoznačně převádí množinu $B_R(0) \setminus \{0\}$ na množinu $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}$ a naopak, a mezivýsledky

$$\frac{|x|}{R} |x' - y| = |x - y| \qquad \text{pro } |y| = R \text{ a } 0 < |x| \neq R,$$

$$\Delta_x Q(x, y) = 0 \qquad \text{pro } |y| = R \text{ a } |x| \neq R$$

a

$$\frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} Q(x', y) \, \mathrm{d}S(y) = 1 \qquad \text{pro všechna } x' \in B_R(0).$$

Tentokrát důkaz založíme na vlastnostech funkce

$$\Phi(x, y) := \frac{|x|^2 - R^2}{R|x - y|^N} = -Q(x, y) \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^N,\ x \neq y.$$

Nejprve si povšimněme, že

$$\Phi(x, y) > 0 \quad \text{kdykoliv } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}$$

a
$$\Phi(x,y) = 0 \quad \text{kdykoliv } x \in \partial B_R(0).$$
Dále díky vlastnostem funkce Q platí
$$\Delta_x \Phi(x,y) = 0 \qquad \text{pro } |y| = R \text{ a } |x| \neq R.$$
Odtud
$$\Delta u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \Delta_x \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) = 0.$$
Tím jsme ukázali harmoničnost u. Nyní pro $|x| > 2R$ pišme
$$\begin{aligned}|u(x)| &= \Big| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \,\mathrm{d}S(y) \Big| \le C \int_{\partial B_R(0)} C \frac{|x|^2}{R(|x|-R)^N} \,\mathrm{d}S(y) \\ &\le \frac{C}{|x|^{N-2}}.\end{aligned}$$
Proto je funkce u dokonce harmonická s kontrolovaným růstem.

Nyní se zaměříme na hraniční chování. Nejprve použijeme vlastnosti kruhové inverze a vlastnosti funkce Q k získání rovnosti platné pro $|x| > R$
$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) &= \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \,\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{\kappa_N} \frac{|x|^2}{R^2} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\frac{R^2}{|x|^2}(|x|^2 - R^2)}{R(\frac{|x|}{R}|x'-y|)^N} \,\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{\kappa_N} \Big(\frac{R}{|x|} \Big)^{N-2} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x'|^2}{R(|x'-y|)^N} \,\mathrm{d}S(y) \\ &= \Big(\frac{R}{|x|} \Big)^{N-2} \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} Q(x', y) \,\mathrm{d}S(y) = \Big(\frac{R}{|x|} \Big)^{N-2}.\end{aligned}$$
Označme $M := \max_{\partial B_R(0)} |g|$ a zvolme $x_0 \in \partial B_R(0)$ a $\varepsilon > 0$. K našemu ε najděme $\delta \in (0, R)$ tak malé, že
$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } y \in \partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0).$$
Pro každé $x \in B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_R(0)}$ pak díky vlastnostem funkce Φ máme
$$\begin{aligned}\Big| u(x) - \Big(\frac{|x|}{R} \Big)^{N-2} g(x_0) \Big| &= \Big| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) - \Big(\frac{|x|}{R} \Big)^{N-2} g(x_0) \Big| \\ &= \Big| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} (g(y) - g(x_0)) \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) \Big| \\ &\le \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

První integrál úplně napravo odhadneme velice snadno

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \cap B_{2\delta}(x_0)} \varepsilon \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) \leq \varepsilon \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} \Phi(x,y) \,\mathrm{d}S(y) \\
&= \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2} \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Pro druhý integrál máme

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} (|g(y)| + |g(x_0)|) \frac{(|x|+R)(|x|-R)}{R|x-y|^N} \,\mathrm{d}S(y) \\
&\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0) \setminus B_{2\delta}(x_0)} 2M \frac{3R(|x|-R)}{R\delta^N} \,\mathrm{d}S(y) \\
&\leq 2M \frac{3R(R-|x|)R^{N-1}}{R\delta^N} = \frac{6M}{\delta^N}(R-|x|)R^{N-1}.
\end{aligned}
$$

Pokud $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)} \cap B_\delta(x_0)$ a $|x|$ je dostatečně blízko k R, celkově dostáváme

$$
|u(x) - g(x_0)| \leq \left| u(x) - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{N-2} g(x_0) \right| + \left| \left(\frac{|x|}{R}\right)^{N-2} g(x_0) - g(x_0) \right| \leq 3\varepsilon.
$$

Jednoznačnost řešení plyne z Věty o jednoznačnosti vnější Dirichletovy úlohy (Věta 6.4.2), kterou sice dokážeme později, ale nebudeme k ní potřebovat tento výsledek; nepůjde tedy o důkaz kruhem. □

Poznámka 6.3.6. Opět se snadno získá verze věty pro $g \in L^\infty(\partial B_R(0))$. Jednoduchou modifikací lze také získat verzi věty pro množinu $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(x_0)}$.

Právě uvedené věty o Greenových funkcích se dají využít k získání dalších výsledků o růstu harmonických funkcí.

Věta 6.3.7 (Liouvilleova věta pro harmonické funkce)**.** *Nechť $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^N$, která je omezená zdola. Pak je konstantní. Analogicky pro harmonickou funkci omezenou shora.*

Důkaz. Stačí uvažovat omezenost zdola, jinak lze níže pracovat s funkcí $-u$. Případným přičtením aditivní konstanty můžeme dokonce dosáhnout toho, že

$$
0 \leq u(x) \qquad \text{na } \mathbb{R}^N.
$$

Zvolme libovolné $x \in \mathbb{R}^N$ a zafixujme $R > |x|$. Nejprve si povšimněme, že díky Větě o Greenově funkci pro kouli (Věta 6.3.2) platí

$$
u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-y|^N} \,\mathrm{d}S(y).
$$

Navíc pro každé $y \in \partial B_R(0)$ máme odhady

$$
R - |x| \leq |x-y| \leq R + |x|.
$$

Tyto mezivýsledky nám spolu s Větou o střední hodnotě harmonických funkcí (Věta 6.2.9) dávají

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R(R-|x|)^N} \, \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R+|x|}{R(R-|x|)^{N-1}} \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \, \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R+|x|}{R(R-|x|)^{N-1}} R^{N-1} u(0) \overset{R\to\infty}{\to} u(0) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R(R+|x|)^N} \, \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R-|x|}{R(R+|x|)^{N-1}} \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \, \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R-|x|}{R(R+|x|)^{N-1}} R^{N-1} u(0) \overset{R\to\infty}{\to} u(0). \end{aligned}$$

Proto $u(x) = u(0)$. Protože $x \in \mathbb{R}^N$ bylo libovolné, dostali jsme $u \equiv u(0)$. □

Věta 6.3.8 (O limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je neomezená množina, pro kterou je $\partial\Omega$ omezená, a nechť $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce s kontrolovaným růstem na Ω a $N \geq 3$. Pak pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí*

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2+|\alpha|}}\Big) \qquad \textit{pro } |x| \to \infty.$$

Je-li $N = 2$ a $|\alpha| > 0$, pak dokonce platí

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\Big) \qquad \textit{pro } |x| \to \infty.$$

Důkaz. Předně pro $N \geq 3$ a triviální multiindex tvrzení plyne přímo z definice harmoničnosti s kontrolovaným růstem. V ostatních případech použijeme Větu o Greenově funkci pro doplněk koule (Věta 6.3.5). Zvolme $R > 0$ tak velké, aby $\partial\Omega \subset B_R(0)$. Pak máme

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Připomeňme, že jednoznačnost řešení na doplňku koule budeme dokazovat v příští sekci, důkaz je ale nezávislý na tomto výsledku. Ukažme, že platí

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) D_x^\alpha \Big(\frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N}\Big) \, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Povšimněme si, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{1, \dots, N\}$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |x-y|^{-k} = -k|x-y|^{-k-1} \frac{x_j}{|x-y|} = \frac{-kx_j}{|x-y|^{k+2}} \qquad \text{pro } x \neq y.$$

Užitím tohoto výpočtu, Leibnizova pravidla a skutečnosti, že derivování nekonstantního polynomu snižuje jeho stupeň o jedničku, je snadné si uvědomit následující skutečnosti. Jednak parciální derivace $D_x^\alpha(\frac{|x|^2-R^2}{R|x-y|^N})$ existuje pro libovolné $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ a libovolné $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}$. Dále pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ a libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}$ existují $\delta > 0$ a $C > 0$ taková, že

$$\left| D_x^\alpha \Big(\frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \Big) \right| \leq C \qquad \text{pro všechna } x \in B_\delta(x_0) \text{ a } y \in \partial B_R(0).$$

Díky těmto odhadům a omezenosti funkce u na $\partial B_R(0)$ můžeme podle libosti používat Větu o derivaci integrálu podle parametru, která nám okamžitě dává slíbený vzorec pro $D^\alpha u(x)$.

Nyní nechť $N \geq 3$. Díky výše zmíněným jevům spojeným s parciálním derivováním je možné si povšimnout, že

$$\left| D_x^\alpha \Big(\frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \Big) \right| \leq \frac{C}{|x|^{N-2+|\alpha|}} \qquad \text{pro } |x| > 2R.$$

Celkově proto dostáváme

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \left| \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} u(y) D_x^\alpha \Big(\frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \Big) \, \mathrm{d}S(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} C \frac{C}{|x|^{N-2+|\alpha|}} \, \mathrm{d}S(y) = \frac{C}{|x|^{N-2+|\alpha|}}. \end{aligned}$$

Je-li $N = 2$, stačí si uvědomit, že pro $|y| = R$ platí

$$\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^2} = 1 + \frac{2(x \cdot y - R^2)}{|x|^2 - 2x \cdot y + R^2},$$

a můžeme postupovat stejně jako výše. Konstantní člen při derivovaní zmizí a derivace harmonické funkce s kontrolovaným růstem tedy klesají o jednu mocninu rychleji než ve vyšší dimenzi. □

Poznámka 6.3.9. I když jsme v předchozí větě použili vztah pro řešení z Věty o Greenově funkci pro doplněk koule (Věta 6.3.5), protože se nám podaří ukázat jednoznačnost řešení úlohy na doplňku koule bez použití Věty o limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem (Věta 6.3.8), o žádný důkaz kruhem nepůjde.

Posledním typem úlohy, kterým se budeme zabývat, je úloha na poloprostoru $\mathbb{R}^N_+ := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ (pak $\partial\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$). Hledáme $u \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ takové, že pro dané $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+)$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^N_+ \\ u &= g && \text{na } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Tentokrát si při konstrukci korekční funkce vypomůžeme přesunutím singularity do poloroviny $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N < 0\}$ prostřednictvím *zrcadlení*. K tomuto účelu si pro $x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ zavedeme značení $\widetilde{x} := (x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N)$. Definujme funkci

$$v(y, x) := \mathcal{E}(\widetilde{x} - y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N_+ \text{ a } y \in \partial\mathbb{R}^N_+.$$

Pak pro $y \in \partial\mathbb{R}^N_+$ (tedy $y_N = 0$) platí $|\widetilde{x} - y| = |x - y|$ a odtud $v(y, x) = \mathcal{E}(x - y)$. Dále

$$\Delta_x v \equiv 0 \equiv \Delta_y v$$

(využili jsme vlastnosti funkce $\mathcal{E}$ a použili princip $(f(-t))' = -f'(-t)$ a $(f(-t))'' = f''(-t)$). Zkonstruovali jsme tedy korekční funkci, které odpovídá Greenova funkce tvaru (poslední rovnost si vysvětlíme pod výpočtem)

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(\mathcal{E}(x - y) - v(y, x)) \\
&= -\Big(\frac{1}{\kappa_N}\frac{x - y}{|x - y|^N} - \frac{1}{\kappa_N}\frac{\widetilde{x} - y}{|\widetilde{x} - y|^N}\Big) \cdot (0, \ldots, 0, -1) \\
&= \frac{1}{\kappa_N}\frac{x_N - y_N}{|x - y|^N} + \frac{1}{\kappa_N}\frac{x_N + y_N}{|\widetilde{x} - y|^N} = \frac{2x_N}{\kappa_N}\frac{1}{|x - y|^N}.
\end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili toho, že do Greenovy funkce budeme dosazovat pouze $y \in \partial\mathbb{R}^N_+$. Bude tedy vždy platit $y_N = 0$, a proto máme $|x - \widetilde{y}| = |x - y|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N_+$.

Získaný výsledek potřebujeme opět zesílit, neboť předchozí výpočet je platný pouze za dodatečného předpokladu, že funkce u je třídy C^2 až do hranice.

Věta 6.3.10 (O Greenově funkci pro poloprostor)**.** *Nechť* $N \geq 2$ *a* $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)$. *Pak funkce*

$$u(x) := \frac{2x_N}{\kappa_N}\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x - y|^N}\, \mathrm{d}S(y)$$

splňuje $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ *a je řešením úlohy* (6.3.5)*, přičemž okrajová podmínka je splněna ve smyslu*

$$\lim_{x \to x_0, x \in \mathbb{R}^N_+} u(x) = g(x_0) \qquad \textit{pro každé } x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+.$$

Důkaz. Důkaz je poměrně dlouhý. Pro přehlednost jej rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: konvergence a derivace integrálu
Zaměřme se nyní na formuli

$$u(x) = \frac{2x_N}{\kappa_N}\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)\frac{1}{|x - y|^N}\, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N_+.$$

Pokud využijeme předpoklad $g \in L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)$, vidíme, že integrál konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}^N_+$. Dále, pokud zopakujeme si úvahy týkající se chování $\frac{\partial}{\partial x_j}|x-y|^{-k}$ z důkazu Věty o limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem (Věta 6.3.8), snadno lze nahlédnout, že na dostatečně malém okolí každého bodu $x \in \mathbb{R}^N_+$ lze prohazovat parciální derivace a integrál podle libosti. Proto $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ a

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \Delta\Big(\frac{2x_N}{\kappa_N}\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)\frac{1}{|x-y|^N}\,\mathrm{d}S(y)\Big)\\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)\Delta_x\Big(-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(\mathcal{E}(x-y)-v(y,x))\Big)\,\mathrm{d}S(y)\\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)\Delta_x\Big(\frac{\partial}{\partial y_N}(\mathcal{E}(x-y)-v(y,x))\Big)\,\mathrm{d}S(y)\\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)\frac{\partial}{\partial y_N}(\Delta_x(\mathcal{E}(x-y)-v(y,x)))\,\mathrm{d}S(y) = 0.
\end{aligned}$$

Krok 2: integrál z Greenovy funkce
Nyní si dokážeme, že

$$\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) = 1 \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^N_+.$$

Máme (nejprve označíme $r := \sqrt{(x_1-t_1)^2+\cdots+(x_{N-1}-t_{N-1})^2}$, pak použijeme sférickou Fubiniho větu a nakonec ještě substituci $s = \frac{r}{x_N}$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} G(x,y)\,\mathrm{d}S(y)\\
&\quad= \frac{2x_N}{\kappa_N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{((x_1-t_1)^2+\cdots+(x_{N-1}-t_{N-1})^2+x_N^2)^{\frac{N}{2}}}\,\mathrm{d}t\\
&\quad= \frac{2x_N}{\kappa_N}\int_0^\infty \frac{\kappa_{N-1}r^{N-2}}{(r^2+x_N^2)^{\frac{N}{2}}}\,\mathrm{d}r = \frac{2\kappa_{N-1}}{\kappa_N}\int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{(s^2+1)^{\frac{N}{2}}}\,\mathrm{d}s = 1,
\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku použili výsledek Cvičení 6.3.12 uvedeného níže. Tento výsledek spolu s předpokladem $g \in L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)$ okamžitě dává $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$.

Krok 3: hraniční chování
Zvolme $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$ a $\varepsilon > 0$. K našemu ε najděme $\delta > 0$ takové, že

$$|g(y)-g(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } y \in \partial\mathbb{R}^N_+ \cap B_{2\delta}(x_0).$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^N_+ \cap B_\delta(x_0)$ pak díky vlastnostem funkce G máme

$$
\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \Big| \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} g(y)G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) - g(x_0) \Big| \\
&= \Big| \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} (g(y) - g(x_0))G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \Big| \\
&\le \int_{\partial\mathbb{R}^N_+ \cap B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\qquad + \int_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{2\delta}(x_0)} |g(y) - g(x_0)| G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

První integrál úplně napravo odhadneme velice snadno

$$
I_1 \le \int_{\partial\mathbb{R}^N_+ \cap B_{2\delta}(x_0)} \varepsilon G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \le \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) = \varepsilon.
$$

Pro druhý integrál máme

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \int_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{2\delta}(x_0)} (|g(y)| + |g(x_0)|)G(x,y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&\le 2\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)} \frac{2x_N}{\kappa_N} \int_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus B_{2\delta}(x_0)} \frac{1}{|x-y|^N}\,\mathrm{d}S(y) \le C(\delta)x_N.
\end{aligned}
$$

Pokud $x \in \mathbb{R}^N_+ \cap B_\delta(x_0)$ a x_N je dostatečně blízko k nule, celkově dostáváme

$$
|u(x) - g(x_0)| \le 2\varepsilon.
$$

□

Poznámka 6.3.11. (i) Opět je možné snadno získat verzi věty pro $g \in L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)$ a také verzi pro posunutý poloprostor.
(ii) Všimněme si, že se nám nepodařilo získat jako řešení harmonickou funkci s kontrolovaným růstem. To souvisí s tím, že hranice oblasti, na které Dirichletovu úlohu řešíme, je neomezená. Abychom takové řešení získali, museli bychom předpokládat nějaké podmínky poklesu funkce g v nekonečnu.

Cvičení 6.3.12. Ukažte, že pro každé $N \ge 2$ platí ($\kappa_1 = 2$)

$$
\frac{2\kappa_{N-1}}{\kappa_N} \int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{(s^2+1)^{\frac{N}{2}}}\,\mathrm{d}s = 1. \tag{6.3.6}
$$

Návod: 1. Přímým výpočtem ukažte, že vztah (6.3.6) platí pro $N = 2$ a $N = 3$.
2. Derivováním zlomku $\frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{\frac{N}{2}}}$ a integrací výsledné rovnosti ukažte, že pokud označíme

$$
J_N := \int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{(s^2+1)^{\frac{N}{2}}}\,\mathrm{d}s,
$$

dostáváme pro $N \geq 2$

$$\frac{J_{N+2}}{J_N} = \frac{N-1}{N}.$$

3. Použitím vztahu

$$\kappa_N = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$$

a indukcí dokažte vztah (6.3.6) pro libovolné $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

6.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici

Nejprve se budeme zabývat Dirichletovou úlohou, která je jednodušší. Rozlišujeme dva typy této úlohy, kterým se budeme věnovat. Prvním typem je *vnitřní Dirichletova úloha*, kde máme zadanou omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ a hledáme $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Další úlohy, kdy je hranice množiny nekompaktní (například dříve studovaná úloha na poloprostoru), jdou nad rámec těchto skript.

Druhým typem je *vnější Dirichletova úloha*, kde máme zadanou omezenou oblast $G \subset \mathbb{R}^N$ takovou, že i $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ je oblast. Pro funkce $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, kde f má navíc omezený nosič, tedy $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ pro vhodné $R > 0$, hledáme $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ u &= g && \text{na } \partial\Omega \\ u(x) &= \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2}}\Big) && \text{pro } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

Jednoznačnost řešení pro vnitřní Dirichletovu úlohu jsme již dokázali pomocí principu maxima ve Větě o jednoznačnosti řešení vnitřní Dirichletovy úlohy (Důsledek 6.3.1).

Důkaz další věty bude vyžadovat jeden pomocný výsledek, který je analogií situace pro holomorfní funkce. Prezentovaný důkaz pochází z knihy [Pe].

Věta 6.4.1 (O prodloužení harmonických funkcí)**.** *Nechť Ω je omezená oblast, $x_0 \in \Omega$ a u je harmonická a omezená funkce na $\Omega \setminus \{x_0\}$. Potom lze dodefinovat funkci u v bodě x_0 tak, že výsledná funkce je harmonická v Ω.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod x_0 je počátkem soustavy souřadnic. Dále na chvíli předpokládejme, že $N = 2$, což je přesně situace, ve které toto tvrzení potřebujeme. Na závěr zmíníme modifikace pro $N \geq 3$.

Zvolme $\delta > 0$ takové, že $\overline{B_\delta(0)} \subset \Omega$. Podle Věty o Greenově funkci pro kouli (Věta 6.3.2) a Věty o jednoznačnost řešení vnitřní Dirichletovy úlohy (Důsledek 6.3.1) víme, že existuje právě jedna funkce $u_1 \in C^2(B_\delta(0)) \cap C(\overline{B_\delta(0)})$ harmonická v $B_\delta(0)$ taková, že $u = u_1$ na $\partial B_\delta(0)$ (připomeňme, že funkce u je na $\partial B_\delta(0)$ přinejmenším spojitá). Označme $v := u - u_1$. Ukažme, že $v \equiv 0$ na $\overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$, tedy lze tuto funkci dodefinovat nulou v počátku, přičemž v zůstává harmonická v $B_\delta(0)$. Proto lze vzít $u(0) := u_1(0)$ a toto dodefinování bude splňovat tvrzení naší věty.

Uvažujme funkci (nyní se projeví volba $N = 2$)

$$w_{\varepsilon_0}(x) := \frac{M \log(\frac{|x|}{\delta})}{\log(\frac{\varepsilon_0}{\delta})},$$

kde $x \in \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}$ a $M = \sup_{x \in \overline{B_\delta(0)} \setminus \{0\}} |v(x)|$. Fixujme libovolný bod $x_1 \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ a vezměme $\varepsilon_0 < \delta$ dostatečně malé, aby $x_1 \in B_\delta(0) \setminus \overline{B_{\varepsilon_0}(0)}$. Zvolme $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Potom je funkce w_ε (místo parametru ε_0 je v definici ε) harmonická na $B_\delta(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$, je rovna M na $\partial B_\varepsilon(0)$ a nulová na $\partial B_\delta(0)$. Podle Důsledku 6.2.11, bodu (iii) dostáváme, že

$$\max_{\overline{B_\delta(0)} \setminus B_\varepsilon(0)} (v - w_\varepsilon) \le 0 \qquad \text{a} \qquad \max_{\overline{B_\delta(0)} \setminus B_\varepsilon(0)} (-v - w_\varepsilon) \le 0.$$

Odsud plyne, že $|v(x_1)| \le w_\varepsilon(x_1)$ pro libovolné $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Tedy

$$|v(x_1)| \le \lim_{\varepsilon \to 0_+} w_\varepsilon(x_1) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{M \log(\frac{|x_1|}{\delta})}{\log(\frac{\varepsilon}{\delta})} = 0.$$

Proto $v(x_1) = 0$. Protože $x_1 \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ bylo libovolné, je $v \equiv 0$ v $B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Pro případ $N \ge 3$ dojde ke změně pouze při volbě funkce w_ε, místo

$$w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon^2(x) = \frac{M \log(\frac{|x|}{\delta})}{\log(\frac{\varepsilon}{\delta})}$$

budeme volit

$$w_\varepsilon^N(x) := M \frac{1 - (\frac{\delta}{|x|})^{N-2}}{1 - (\frac{\delta}{\varepsilon})^{N-2}}.$$

□

Věta 6.4.2 (O jednoznačnosti vnější Dirichletovy úlohy)**.** *Nechť $N \ge 2$. Potom vnější Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici má na třídě funkcí $\{v\colon v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}$ nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Předpokládejme, že u_1, u_2 řeší vnější Dirichletovu úlohu (se stejnými daty). Pro $w := u_1 - u_2$ pak platí

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{na } \Omega \\ w &= 0 && \text{na } \partial\Omega \\ w(x) &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{N-2}}\right) && \text{pro } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

a) Nechť $N \geq 3$. Potom poslední podmínka uvedená výše zaručuje, že platí $\lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0$. Zvolme libovolná $x_0 \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $R > 0$ tak velké, že $x_0 \in B_R(0)$, $G \subset B_R(0)$ (připomeňme, že $G = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$) a $|w| \leq \varepsilon$ na $\partial B_R(0)$. Větu o zesíleném principu maxima (Věta 6.2.10) budeme nyní aplikovat na množinu $\Omega_R := \Omega \cap B_R(0)$. Tentokrát máme $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \partial B_R(0)$, přičemž $w \leq \varepsilon$ na $\partial B_R(0)$ a $w = 0$ na $\partial\Omega$. Proto

$$w \leq \varepsilon \qquad \text{na } \Omega_R,$$

speciálně $w(x_0) \leq \varepsilon$. Protože $x_0 \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ byla libovolná a předchozí úvahy platí i pro funkci $-w$, jsme hotovi.

b) Nechť $N = 2$. Umístěme nyní počátek soustavy souřadnic do $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Fixujme (otevřený) kruh $K_R(0) \subset G = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Definujme zobrazení $F\colon \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pomocí $F(x) = x'$, přičemž $x' = x\frac{R^2}{|x|^2}$ (tedy x a x' leží na téže polopřímce vycházejí z počátku). Potom F zobrazuje Ω do jisté oblasti $\Omega^* \subset\subset K_R(0)$, která je okolím počátku, přičemž $F(\Omega) = \Omega^* \setminus \{0\}$. Definujme funkci w' v $\Omega^* \setminus \{0\}$ jako

$$w'(x') = w\big(F^{-1}(x')\big) = w(x).$$

Zřejmě $w' = 0$ na $\partial\Omega^*$. Ukažme, že w' je harmonická na $\Omega^* \setminus \{0\}$. Označme $r = |x|$ a $\varrho = |x'|$. Dále označme

$$\widetilde{w}(r,\varphi) = w(x_1,x_2)$$
$$\widetilde{w}'(\varrho,\varphi') = w'(x_1',x_2')$$

a přechodem do polárních souřadnic

$$\Delta_x w = \frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial\varphi^2}$$
$$\Delta_{x'}\widetilde{w}' = \frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varphi'^2},$$

přičemž $\varphi = \varphi'$ a $r\varrho = R^2$. Máme tedy

$$\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial r} = \frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varrho}\cdot\Big(-\frac{R^2}{r^2}\Big)$$
$$\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varrho^2}\frac{R^4}{r^4} + \frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varrho}\frac{2R^2}{r^3}$$
$$\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varphi'}.$$

Proto

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial\varphi^2} &= \frac{R^4}{r^4}\frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varrho^2} + \frac{R^2}{r^3}\frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varrho} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varphi^2} \\ &= \frac{\varrho^4}{R^4}\frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varrho^2} + \frac{\varrho^3}{R^4}\frac{\partial\widetilde{w}'}{\partial\varrho} + \frac{\varrho^2}{R^4}\frac{\partial^2\widetilde{w}'}{\partial\varphi^2}. \end{aligned}$$

Odsud plyne, že $\Delta_{x'} w' = 0$ na $\Omega^* \setminus \{0\}$. Konečně je také zřejmě w' omezená na $\Omega^* \setminus \{0\}$. Můžeme proto použít Větu o prodloužení harmonických funkcí (Věta 6.4.1) a po vhodném prodloužení funkce w' je $\Delta w' = 0$ na Ω^*. Díky Větě o jednoznačnosti řešení vnitřní Dirichletovy úlohy (Důsledek 6.2.7) je $w' \equiv 0$ na $\overline{\Omega^*}$, tedy $w \equiv 0$ na $\overline{\Omega}$. □

Nyní se budeme zabývat Neumannovou úlohou. Opět se budeme věnovat dvěma typům úloh. Nejprve uvažujme omezenou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a funkce $f \in C(\overline{\Omega})$ a $g \in C(\partial\Omega)$. O funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$, řekneme, že je řešením *vnitřní Neumannovy úlohy* na Ω, jestliže

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= g && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

přičemž druhou podmínku chápeme tak, že $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ v bodech hranice, kde existuje jednotková vnější normála (pro oblasti, jejichž hranici lze popsat pomocí překrývajících se C^1 zobrazení v lokálních souřadných soustavách, je to ve všech bodech).

Druhý typ úlohy zavádíme tak, že uvažujeme omezenou oblast $G \subset \mathbb{R}^N$, definujeme $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$, kde Ω je opět oblast, a opět předpokládáme, že $f \in C(\overline{\Omega})$ a $g \in C(\partial\Omega)$, a f má navíc kompaktní nosič (často se píše $f \in C_0(\overline{\Omega})$ či $f \in C_c(\overline{\Omega})$). O funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$, řekneme, že je řešením *vnější Neumannovy úlohy* na Ω, jestliže

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= g && \text{na } \partial\Omega \\ u(x) &= \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2}}\Big) && \text{pro } |x| \to \infty, \end{aligned}$$

přičemž druhou podmínku chápeme tak, že $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ v bodech hranice, kde existuje jednotková vnější normála.

Pro řešitelnost vnitřní Neumannovy úlohy máme následující nutnou podmínku.

Věta 6.4.3 (O nutné podmínce řešitelnosti vnitřní Neumannovy úlohy)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy C^1. Nechť $f \in C(\overline{\Omega})$ a $g \in C(\partial\Omega)$. Existuje-li funkce $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ taková, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu na Ω s daty f a g, pak*

$$-\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g \, \mathrm{d}S.$$

Důkaz. Podle Věty o divergenci platí

$$-\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} g \, \mathrm{d}S.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 6.4.4. (i) Pokud chápeme Neumannovu rovnici pro Poissonovu rovnici jako rovnici pro stacionární stav rovnice vedení tepla se zadaným tepelným tokem přes hranici, tato podmínka říká, že aby stacionární stav nastal, musí být celkové objemové zdroje tepla (tedy $-\int_\Omega f\,\mathrm{d}x$) v rovnováze s celkovým tepelným tokem přes hranici (tedy $\int_{\partial\Omega} g\,\mathrm{d}S$). Jde tedy o zcela přirozenou podmínku. V případě zadané Dirichletovy podmínky je výměna tepla přes hranici zaručena díky tomu, že se udržuje předepsaná teplota na hranici, proto žádný vztah mezi daty úlohy není třeba.
(ii) Analogická věta pro neomezené oblasti obecně neplatí, a to i když předpokládáme, že funkce f je integrovatelná a klesá dostatečné rychle v nekonečnu (například má-li kompaktní nosič). Podmínka nemusí platit, protože při příslušné integraci per partes může být „netriviální tok v nekonečnu“.

Věta 6.4.5 (O jednoznačnosti vnitřní Neumannovy úlohy)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy C^1. Existuje-li $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici na Ω s daty f a g, pak je na této třídě funkcí jednoznačné až na aditivní konstantu.*

Důkaz. Nechť u_1, u_2 jsou řešení. Položme $w := u_1 - u_2$. Pak

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Díky vztahu (ii) z Věty o Greenových identitách (Věta 1.3.5) dostáváme

$$0 = \int_\Omega w \Delta w \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Odtud $\nabla w \equiv \mathbf{0}$ na Ω. Proto je $u_1 - u_2$ konstantní. □

Poznámka 6.4.6. Všimněme si, že nejednoznačnost z předchozí věty je v principu věci. Je-li funkce u řešením vnitřní Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici, potom $u + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, je řešením téže úlohy.

Věta 6.4.7 (O jednoznačnosti vnější Neumannovy úlohy)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí třídy C^1. Položme $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ a předpokládejme, že je souvislá. Nechť existuje $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$, řešící vnější Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici na Ω s daty f a g. Jestliže $N \geq 3$, pak je toto řešení na dané třídě funkcí jednoznačné. Jestliže $N = 2$, pak je toto řešení jednoznačné až na aditivní konstantu.*

Důkaz. Nechť u_1, u_2 jsou řešení. Položme $w := u_1 - u_2$. Pak

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{na } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= 0 && \text{na } \partial\Omega \\ w(x) &= \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2}}\Big) && \text{pro } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

Zafixujme $R > 0$ tak velké, aby $\overline{G} \subset B_R(0)$. Definujme

$$\Omega_R := B_R(0) \setminus \overline{G} = \Omega \cap B_R(0).$$

Pak $\partial\Omega_R = \partial G \cup \partial B_R(0)$ a díky Větě o integraci per partes máme (pozor na směr vnějších normál na jednotlivých částech $\partial\Omega_R$)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R} w \Delta w \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S - \int_{\partial G} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega_R} \nabla w \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega_R} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zabývejme se nyní na chvíli pouze případem $N \geq 3$. Pokud zkombinujeme růstový předpoklad s Větou o limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem (Věta 6.3.8), dostáváme

$$\left| w(y) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \right| \leq \frac{C}{|y|^{N-2}} \frac{C}{|y|^{N-2+1}} = \frac{C}{|y|^{2N-3}}.$$

Díky tomu celkově máme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B_R(0)} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \left| \int_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S \right| \leq \int_{\partial B_R(0)} \frac{C}{|R|^{2N-3}} \, \mathrm{d}S \\ &= \frac{C}{|R|^{2N-3}} C R^{N-1} = \frac{C}{R^{N-2}} \overset{R \to \infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Proto (díky Lebesgueově větě o monotónní konvergenci)

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

a odtud je w konstantní na $\overline{\Omega}$. Protože navíc platí růstová podmínka $w(x) = \mathrm{O}(\frac{1}{|x|^{N-2}})$ pro $|x| \to \infty$, musí dokonce platit $w \equiv 0$ na $\overline{\Omega}$.

Zbývá případ $N = 2$, kdy použijeme rychlejší pokles derivací z Věty o limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem (Věta 6.3.8). Máme totiž

$$\left| w(y) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) \right| \leq C \frac{C}{|y|^2} = \frac{C}{|y|^2},$$

stejně jako pro $N \geq 3$ pak dostáváme, že

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}S = 0,$$

proto
$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$
Tedy w je konstantní je na $\overline{\Omega}$. Protože žádný pokles v nekonečnu nemáme k dispozici, silnější výsledek nemůžeme získat. $\square$

Literatura

[ČePo 3] ČERNÝ, R., POKORNÝ, M.: *Základy matematické analýzy pro studenty matematiky 3.* Matfyzpress 2023.

[Ev PDE] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, 1998.

[Ka] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen reeller Funtionen.* Geest& Portig K. G., Leipzig, 1956 (3. vydání).

[JoNe RMF] JOHN, O. a NEČAS, J.: *Rovnice matematické fyziky.* Skriptum MFF UK, SPN Praha, 1977.

[KJF] KUFNER, A., JOHN, O., FUČÍK, S.: *Function spaces.* Noordhoff International Publishhing, Leyden, 1977.

[Ne] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Academia, Praha, 1967.

[Pe] PETROVSKII, I. G.: *Parciální diferenciální rovnice.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.

[ReRo] RENARDY, M., ROGERS, R. C.: *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer Verlag, 1993.

[Šm LA] ŠMÍD, D.: *Lineární algebra pro fyziky.* `https://www.karlin.mff.cuni.cz/ smid/pmwiki/pmwiki.php`

[Ti] TICHONOV, A.: *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.* Mat. Sb., 42 (2): 199–216 (1935).

Rejstřík